Una nuova interpretazione del problema dei buoi di Archimede conduce ad una soluzione finalmente "ragionevole"... <u>AGGIORNAMENTO NOVEMBRE 2014</u>

(Calogero Savarino - savarino.calogero@virgilio.it)

4.XI.2010

Quasi esattamente 4 anni fa abbiamo presentato nel Forum di Episteme un'interpretazione del testo del famoso problema archimedeo che conduceva ad una soluzione ragionevole, ma non ... abbastanza.

Calogero Savarino (attenzione al cambiamento di indirizzo e-mail!) ha continuato a pensare alla questione, ed ha proposto un nuovo sistema di equazioni che oltre ad essere alquanto conforme al testo conduce ad una soluzione del tutto accettabile.

Abbiamo lasciato in calce alla presente pagina web la vecchia interpretazione, in modo che sia possibile, volendo, esaminare le differenze con la più recente. Diciamo che, fermi restando simbolismo ed impostazione generale precedente, le attuali modifiche consistono in due punti principali:

1 - il primo, che quando Archimede parla per esempio di una metà ed una terza parte di una certa quantità X, ciò non sta a significare né $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})X$, né $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * X$, bensì $\frac{1}{2}X + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2})X$, vale a dire un terzo della parte rimanente;

2 - il secondo, che la famosa condizione quadratica sulla caratteristica di un dato numero di essere triangolare, non va riferita a C+D (ossia alla somma dei tori bruni e degli screziati), bensì a C+D+C'+D' (ossia alla somma dei tori e delle giovenche dei detti colori - si noti infatti che il testo non parla ancora solo di tori).

Ciò premesso, veniamo ad esporre la nuova soluzione di Savarino.

Con il suggerimento di cui al punto 1, le prime tre equazioni diventano:

$$A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}(1-\frac{1}{2})B = \frac{4}{6}B$$

$$B = \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}(1-\frac{1}{4})D = \frac{8}{20}D$$
$$\frac{12}{20}D = \frac{1}{6}(A+C) + \frac{1}{7}(1-\frac{1}{6})(A+C) = \frac{12}{42}(A+C)$$

Mentre le seconde quattro diventano (mantenendo adesso l'ordine con cui le enuncia Archimede):

$$A' = \frac{1}{3}(B+B')+\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3})(B+B') = \frac{6}{12}(B+B')$$
$$B' = \frac{1}{4}(D'+A+B+D+3C) + \frac{1}{5}(1-\frac{1}{4})(D'+A+B+D+3C) = \frac{8}{20}(D'+A+B+D+3C)$$
$$D' = \frac{1}{5}(C'+3C) +\frac{1}{6}(1-\frac{1}{5})(C'+3C) = \frac{10}{30}(C'+3C)$$
$$C' = \frac{1}{6}(A+C) +\frac{1}{7}(1-\frac{1}{6})(A+C) = \frac{12}{42}(A+C)$$

E' immediato ricavare dal primo sistema di equazioni la seguente soluzione razionale, espressa nell'incognita "libera" D:

$$A =\frac{4}{6} * \frac{8}{20}D = \frac{8}{30}D = \frac{4}{15}D$$
$$B = \frac{8}{20}D = \frac{2}{5}D$$
$$C = \frac{110}{60}D = \frac{11}{6}D$$

dalla quale si deduce che tutte le soluzioni intere del sistema di equazioni in oggetto sono espresse, tramite un parametro intero T, dalle:

$$D = 30*T$$
$$A =\frac{4}{15}30*T = 8*T$$
$$B = \frac{2}{5}30*T = 12*T$$
$$C = \frac{11}{6}30*T = 55*T.$$

Possiamo già adesso impostare la prima condizione quadratica imposta dal problema:

A+B = numero quadrato

che diventa attualmente:

20*T = numero quadrato

e comporta quindi:

$T = 5*X^2$

per ogni parametro intero X, ossia in definitiva:

$A = 40*X^2$
$B = 60*X^2$
$C = 275*X^2$
$D = 150*X^2$.

Notiamo subito che **nel caso più semplice**, X = 1, si ottiene la soluzione:

A = 40, B = 60, C = 275, D = 150

che vedremo corrispondere proprio alla soluzione del problema individuata da Savarino.

Per imporre adesso anche la seconda condizione quadratica, passiamo a risolvere il secondo sistema di 4 equazioni.

La quarta equazione, nell'ordine dianzi specificato, ci dà subito:

$$C' = \frac{12}{42}(A+C) = \frac{2}{7}*315*X^2 = 2*45*X^2 = 90*X^2 .$$

Quindi la terza (nella quale sono inclusi tutti i tori bruni che compaiono nei tre gruppi di animali) fornisce:

$$D' = \frac{10}{30}(C'+3C) = \frac{1}{3}(90*X^2 + 3*275*X^2) = 305*X^2 .$$

Proseguendo, dalla seconda si trae:

$$B' = \frac{8}{20}(D'+A+B+D+3C) = \frac{2}{5}(305 + 40 + 60 + 150 + 3*275)*X^2 =$$
$$= (122 + 16 + 24 + 60 + 330)*X^2 = 552*X^2 .$$

Infine, dalla prima:

$$A' = \frac{6}{12}(B+B') = \frac{1}{2}(60 + 552)*X^2 = 306*X^2 .$$

Sottolineiamo subito la circostanza, in qualche misura singolare, che le soluzioni del secondo sistema vengono tutte automaticamente intere, vale a dire che non c'è nessun bisogno di normalizzare qualche nuovo denominatore.

Siamo ormai quasi pervenuti alla conclusione. Per X = 1, la **soluzione minima** del problema, A+B è invero un numero quadrato, mentre C+D = 425 **non** è un numero triangolare. Volendo, si potrebbe giocare sul parametro X nell'espressione $C + D = (275 + 150)*X^2 = 425*X^2$, fino a pervenire ad un numero triangolare, così come abbiamo fatto alla fine della precedente presentazione*, ma con la nuova idea di Savarino (punto 2) non ce n'è nessun bisogno. Infatti, C+D+C'+D' = 425 + 395 = 820 **è un numero triangolare**:

$$820 = \frac{1}{2}*40*41.$$

Ci piace evidenziare da ultimo che il numero 8*820+1 = 6561 è un numero quadrato assai significativo, in quanto coincidente proprio con 3^8, ossia $(3^4)^2$, numero nel quale compaiono i primi tre numeri interi diversi dall'unità, 2, 3, 4, il che potrebbe invero costituire un indizio non trascurabile che la soluzione individuata da Savarino possa essere esattamente quella concepita da Archimede...

* Bisognerebbe arrivare ad X = 42, per incontrare il numero triangolare 749700: $749700 = \frac{1}{2}(1224*1225)$. E' chiaro che per tale valore le soluzioni del problema diventerebbero alquanto "grandi" (almeno rispetto a quelle dianzi ottenute):
A = 70560, B = 105840, C = 484550, D = 264300, etc., ma come si vede poi nemmeno troppo grandi...

(Ulteriori dettagli si possono trovare nel recente libro di Calogero Savarino, *La piu grande invenzione di Archimede*, Book Sprint Edizioni, Romagnano al Monte (Salerno), 2013: http://www.booksprintedizioni.it/libro/Saggistica/la-piu-grande-invenzione-di-archimede.)

Una nuova interpretazione del problema dei buoi di Archimede conduce ad una soluzione finalmente "ragionevole"...

(Calogero Savarino - calogero.savarino@email.it)

«Calcola, o amico, il numero dei buoi del Sole, operando con cura, tu che possiedi molta scienza; calcola in quale numero pascolavano un giorno sulle pianure dell'isola sicula Trinacria, distribuiti in quattro gruppi di vario colore: uno di aspetto bianco latteo, il secondo splendente di color nero, il terzo poi di un bruno dorato ed il quarto screziato. In ogni gregge i tori erano in quantità considerevole, distribuiti secondo i rapporti seguenti: ritieni i bianchi come eguali alla metà ed alla terza parte di tutti i neri ed ai bruni; i neri poi eguali alla quarta parte ed alla quinta degli screziati e a tutti i bruni; i restanti screziati considerali poi come eguali alla sesta ed alla settima parte dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni. Le giovenche invece erano distribuite nei rapporti seguenti: le bianche erano eguali precisamente alla terza e quarta parte di tutto il gregge nero; le nere alla quarta parte insieme alla quinta delle screziate prese assieme ai tori; le screziate erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta di tutti gli animali del gregge bruno; le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte ed alla settima parte del gregge bianco. Quando, o amico, avrai determinato esattamente quanti erano i buoi del Sole, avrai distinto quanti erano di ciascun colore, non ti si chiamerà certamente ignorante nè inabile nei numeri, però non ti si ascriverà peranco fra i sapienti. Ma ora bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole. Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri formavano una figura equilatera, le vaste pianure della Trinacria erano allora tutte piene di buoi; invece i bruni e gli screziati costituivano una figura triangolare. Quando avrai trovato tutto questo e l'avrai esposto sotto forma intelligibile e avrai anche trovato il numero totale dei buoi, allora, o amico, va superbo per quanto hai fatto come un vincitore e sta sicuro di venire considerato come ricco di quella scienza».

- - - - -

In un lavoro del 2004 ("Variazioni sul problema dei buoi di Archimede, ovvero, alla ricerca di soluzioni 'possibili'...", in collaborazione con Maria Cristina Vipera) mi sono occupato del celebre problema dei buoi di Archimede sopra riportato, e delle note difficoltà finora incontrate nel determinarne una soluzione "ragionevole" (che fosse cioè accessibile ad un antico greco non dotato dei moderni strumenti di calcolo elettronico).

Espressi allora l'opinione che Archimede non volesse proporre un problema di fatto insolubile, giocando una sorta di "beffa" ai suoi interlocutori, bensì che ci fossero stati errori nella tradizione del testo, che avevano reso l'enunciato iniziale ormai irriconoscibile. Esaminai allora nel menzionato articolo alcune "varianti" dell'interpretazione ortodossa, alcune delle quali degne di qualche attenzione.

A distanza di anni, una corrispondenza con Calogero Savarino (insegnante elementare in pensione, che vive a Ravanusa, in provincia di Agrigento) mi ha ricondotto ad interessarmi della questione che avevo ormai dimenticato, e portato alla convinzione che in effetti non tanto ad un errore di tradizione bisogna pensare, quanto piuttosto ad un errore di interpretazione. Il testo è infatti volutamente oscuro, proprio perché la sua esatta comprensione costituisse un problema precedente il problema matematico da affrontare.

Mi è sembrato che l'argomentazione e la soluzione proposte da Savarino siano degne di essere conosciute, ed acconsento pertanto con piacere a collaborare con lui in questa presentazione.

Perugia, 6 novembre 2010 - Umberto Bartocci

- - - - -

Il problema di Archimede secondo l'interpretazione comune

Cominciamo con il dare la formalizzazione precisa del problema così come esso viene generalmente interpretato (con linguaggio e simbolismo "moderno"). Con A, B, C, D indichiamo il numero dei tori dei rispettivi 4 colori, bianco, nero, bruno, screziato. Con A', B', C', D' il numero delle mucche dei rispettivi sopraddetti colori (sicché A+A' = totale degli animali costituenti il gruppo bianco, etc.).

$$A = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})B + C$$

$$B = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})D + C$$

$$D = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})A + C$$

$$A' = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(B+B')$$

$$B' = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(D+D')$$

$$C' = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(A+A')$$

$$D' = (\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(C+C')$$

Le ultime due condizioni quadratiche imposte da Archimede (che resteranno invariate nel presente scritto) sono rispettivamente:

A+B = numero quadrato
C+D = numero triangolare = 1+2+...+m = $\frac{m(m+1)}{2}$ $\Leftrightarrow$ 8(C+D)+1 = quadrato.

Entrambe si riducono quindi in definitiva alla richiesta che un dato numero sia un quadrato.

Il problema di Archimede secondo l'interpretazione di Savarino

Gli animali di cui parla Archimede sono ripartiti in QUATTRO distinte mandrie.

- La prima include i tori bianchi, più una parte dei tori bruni; diremo X il numero di questi, di modo che la quantità complessiva di buoi presente in tale mandria sia: A+ X.

- Nella seconda ci sono i tori neri, più ancora la stessa parte di tori bruni che in quella precedente, di modo che tale seconda mandria contiene: B+X buoi.

- Nella terza ci sono tutti i tori screziati e ancora tori bruni, ma il loro numero totale va calcolato suddividendo i tori screziati in due gruppi, i 9/20 di D e gli 11/20 di D, ciascuno dei quali contenente la stessa parte di tori bruni che nei due vasi precedenti, di modo che tale terzo gruppo sia insomma così costituito: (9D/20+X) + (11D/20+X).

Vale anche a dire che: C = 4X.

- Nella quarta mandria ci sono infine tutte le mucche, di qualsiasi colore, di modo che la quantità complessiva di animali in esso presente sia: A'+B'+C'+D'.

Il numero totale dei tori, che chiameremo S, sarà allora:

S =A+B+C+D = A+B+4X+D,

mentre quello delle mucche sarà: S' = A'+B'+C'+D'.

Il numero complessivo degli animali sarà ovviamente:

S + S' = A+A'+B+B'+C+C'+D+D'.

Le relazioni illustrate nell'enunciato del problema vanno, secondo Savarino, intese nel seguente modo:

$$A = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})B$$
$$B = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})D$$
$$\frac{11}{20}D = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(A + X)$$
$$A' = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(B'+B)$$
$$B' = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(D'+S)$$
$$C' = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(A+X)$$
$$D' = (\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(C'+4X)$$

Le due condizioni quadratiche rimangono, come detto, immutate.

Soluzioni razionali delle prime tre equazioni del sistema di Savarino:

$A = \frac{65}{243}X$
$B = \frac{26}{81}X$
$D = \frac{520}{729}X$

Da queste, tenuto conto che $243 = 3^5$, $81 = 3^4$, $729= 3^6$ (e già tale "armonia" ci fa ritenere di essere sulla strada giusta), ed introducendo un parametro intero T, potremo scrivere tutte le soluzioni intere del sistema costituito dalle dette prime 3 equazioni lineari.

A = 195T
B = 234T
X = 729T
D = 520T

Soluzioni razionali delle successive quattro equazioni del sistema di Savarino:

$A' = \frac{291851}{200}T$
$B' = \frac{113379}{50}T$
$C' = 286T$
$D = \frac{17611}{15}T$

Da queste, facilmente, procedendo come prima, introducendo un nuovo parametro intero U, e ponendo T = 600U, potremo scrivere tutte le soluzioni intere del sistema costituito dal sistema complessivo delle 7 equazioni lineari:

A = 117000U
B = 140400U
C = 4X = 1749600U
D = 312000U
A' = 875553U
B' = 1360548U
C' = 171600U
D' = 704440U

Andando a discutere adesso la I condizione quadratica imposta da Archimede, si trova:

$A + B = (117000 + 140400)U = 257400U = X^2$.

Poiché la decomposizione in fattori primi di 257400 è:

$257400 = (2)^3 * (3)^2 * (5)^2 * 11 * 13$

per soddisfare tale condizione basterà porre, introducendo un nuovo parametro intero V:

$U = (2*11*13)V^2 = 286V^2$.

Insomma, ponendo V = 1, Savarino propone per il problema in oggetto la seguente soluzione:

A = 33462000
B = 40154400
X = 125096400
(C = 4X = 500385600)
D = 89232000
(S = 663234000)
A' = 250408158
B' = 389116728
C' = 49077600
D' = 201469840

la quale ovviamente soddisfa, per costruzione, la prima condizione quadratica imposta da Archimede:

A + B = 33462000 + 40154400 = 73616400 = $(8580)^2$.

Si può confrontare, per curiosità, la precedente soluzione con l'analoga soluzione minima della versione ortodossa del problema di Archimede che soddisfa ugualmente la I condizione quadratica (si rimanda per essa all'articolo menzionato nell'introduzione):

A = 10366482*4456749 = 46200808287018
B = 7460514*4456749 = 33249638308986
C = 4149387*4456749 = 18492776362863
D = 7358060*4456749 = 32793026546940
A' = 7206360*4456749 = 32116937723640
B' = 4893246*4456749 = 21807969217254
C' = 5439213*4456749 = 24241207098537
D' = 3515820*4456749 = 15669127269180

(la somma A+B coincide in questo caso con il quadrato di 8913498).

Ciò premesso, con la precedente soluzione di Savarino siamo purtroppo ben lontani da una che soddisfi pure la seconda condizione quadratica, almeno così come la si interpreta comunemente - ma non, come presto diremo, appunto il Savarino!

Infatti:

8(C+D) + 1 = 8(500385600 + 89232000) + 1 = 4716940801

non solo non è un quadrato, ma neppure comprende fattori quadrati. Infatti la sua decomposizione in numeri primi è:

4716940801 = 486433*9697

Savarino osserva che, secondo la sua soluzione, gli animali sono sì in quantità considerevole, come peraltro preannunciato dall'ideatore del quesito, ma ancora ragionevole, e soprattutto compatibili con una condizione finora abbastanza trascurata da tutti i commentatori, quella cioè riguardante la condizione che i buoi potessero essere tutti contenuti nelle "vaste pianure della Trinacria"

Il menzionato autore acutamente specifica al riguardo che:

"La superficie della Sicilia è di 25.700 Kmq, equivalenti a 25.700.000.000 mq. Essendo le pianure solo il 14% della superficie, esse misurano 3.598.000.000 mq. Considerando che un bue occupa minimamente uno spazio di 2 mq, il numero totale dei buoi non può superare 1.800.000.000 (un miliardo e ottocentomilioni, un numero di dieci cifre)".

In effetti, avendo, come oggi si sa, un problema del tipo in oggetto infinite soluzioni, ecco che la condizione ulteriore imposta da Archimede ne limita il numero, precisandone in qualche modo implicitamente la grandezza massima.

Savarino propone allora di interpretare la seconda condizione quadratica nel seguente modo, distinguendo tra un numero strettamente triangolare e una "figura triangolare", come nel testo di Archimede:

"Leggendo attentamente una traduzione più letteraria trovata in rete, noto che il testo dice esattamente: i tori biondi e i variopinti (bruni e screziati) insieme formavano un gruppo che partendo da un elemento, si allargava progressivamente fino a formare una figura triangolare, senza che fossero presenti o assenti tori di altri colori. Per rendere il suo enigma più difficile da risolversi, Archimede ha interposto alle due condizioni quadratiche quella delle pianure, poiché immaginava che i suoi interlocutori (sia antichi che moderni!) avrebbero erroneamente pensato che tale condizione imponesse la ricerca di un ulteriore numero quadrato. Ma una figura quadrata richiede sicuramente un numero quadrato, mentre una figura triangolare, senza specificare nemmeno se isoscele o equilatera o altro, invece no. Si parla di un elemento che si allarga progressivamente, e un elemento potrebbe essere anche inteso come una parte di un intero. Considero allora intero la somma dei tori bruni + i tori screziati: 500.386.600 + 89.232.000 = 589.617.600, e suddivido il gruppo dei tori nel seguente modo:

1 Elemento	98.269.600 * 1	= 98.269.600 +
2 Elementi	98.269.600 * 2	= 196.539.200 +
3 Elementi	98. 269.600 * 3	= 294.808.800
Totale		589.671.600".

Giudicherà il lettore della presente nota quanto detta argomentazione sia condivisibile oppure no. Noi qui, da matematici e per completezza, desideriamo anche sviluppare completamente l'analisi di tale seconda condizione quadratica, anche se, come prevedibile, otterremo numeri eccessivamente grandi, ovvero irrealistici per un problema che si presenta in contesto concreto. Non così grandi però come quelli ottenuti dall'interpretazione comune del problema. Vale a dire che, anche sotto tale aspetto, la versione proposta da Savarino si rivela comunque degna di considerazione.

Val forse la pena di sottolineare esplicitamente, in chiusura di paragrafo, che il merito del Savarino non è ovviamente quello di aver svolto dei semplici calcoli, bensì di aver intuito che forse Archimede era stato volutamente oscuro nell'enunciazione del problema, proprio perché riteneva che una sua interpretazione "ragionevole" fosse una componente essenziale della relativa soluzione numerica. Ecco allora qui di seguito il testo del problema (con l'omissione delle due condizioni quadratiche) opportunamente interpretato secondo Savarino. Siamo moderatamente persuasi che, se non è proprio questa la lettura prevista da Archimede, tale lettura deve comunque essere ad essa abbastanza prossima.

«In ogni mandria i tori erano in quantità considerevole, distribuiti secondo i rapporti seguenti: considera una prima mandria in cui ci sono tori bianchi eguali alla metà ed alla terza parte dei i tori neri, più un certo numero di tori bruni; una seconda mandria in cui ci sono tori neri, eguali alla quarta parte ed alla quinta degli screziati, più un'uguale quantità di tori bruni come nel caso precedente; una terza mandria in cui ci sono tori screziati, ritieni gli undici ventesimi degli screziati uguali alla sesta e alla settima parte dei tori della prima mandria, più una quantità di tori bruni pari alla somma di quelli che sono compresi nella prima e nella seconda mandria. Le mucche invece erano distribuite nei rapporti seguenti: le bianche erano eguali precisamente alla terza e quarta parte di tutti gli animali neri; le nere alla quarta parte insieme alla quinta della somma del numero delle screziate con il numero complessivo dei tori; le screziate erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta di tutti gli animali bruni; le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte ed alla settima parte della prima mandria costituita dai tori bianchi e da un certo numero di tori bruni».

Analisi della seconda condizione quadratica a partire dalla soluzione di Savarino

Possiamo divertirci a cercare tra i numeri del tipo:

$C = 500385600V^2$
$D = 89232000V^2$

quelli tali che:

$8(C+D) + 1 = 8(500385600 + 89232000)V^2 + 1 = 471694080V^2 + 1$

sia un quadrato.

Possiamo cioè discutere la seguente equazione di Pell:

(P) $\quad 471694080V^2 + 1 = X^2$

di cui si ricercano ovviamente coppie di soluzioni V, X che siano intere (e positive).

Il coefficiente che appare nell'equazione (P) si decompone al seguente modo in prodotto di numeri primi:

$471694080 = (2)^9*3*(5)^2*11*13*859$

sicché possiamo isolare la parte quadratica $(2)^8*(5)^2 = 6400 = (80)^2$, e scrivere:

$471694080 = (80)^2*2*3*11*13*859 = (80)^2*737022$

da cui:

(P) $737022(80V)^2 + 1 = X^2$,

ovvero, ponendo Y = 80V, andare a considerare, in luogo dell'equazione (P), la corrispondente equazione di Pell <u>ridotta</u>:

(PR) $737022Y^2 + 1 = X^2$.

Cerchiamo adesso soluzioni della (PR) che siano ovviamente multiple di 80.

Orbene, Y = 1 non è una soluzione di (PR), ma Y = 2 sì, circostanza che interpretiamo come un ulteriore segno che stiamo su una strada interessante!

$737022*(2)^2 + 1 = 2948089 = (1717)^2$.

Come dire che della (PR) è possibile determinare immediatamente una *soluzione fondamentale*, data da:

$\varepsilon = 1717 + 2\sqrt{737022}$.

Tutte le altre soluzioni (X,Y) di (PR) (intendiamo sempre X, Y interi positivi) si ottengono elevando la precedente $\varepsilon = X_0+Y_0\sqrt{737022}$ ad un esponente intero n. Ovvero esse saranno costituite dalle coppie della successione (X_n,Y_n), avendo posto: $\varepsilon^n = X_n+Y_n\sqrt{737022}$.

Tra di esse vogliamo trovare quella minima in cui la Y sia, come detto, un multiplo di 80. Non c'è moltissimo da faticare, però, perché basta porre n = 24 per giungere alla mèta desiderata (si confronti quanto precede con l'analisi della soluzione ortodossa riportata nell'articolo menzionato nell'introduzione).

Ovvero:

$\varepsilon^{24} = X_{24}+Y_{24}\sqrt{737022}$ =
3615564389260434939264395590098808142902710568419416713901452076
2026790009521008064O1 +
4211490975498365178029032800712153859236123259470725127481845894
$230304045470205680\sqrt{737022}$

dove:

4211490975498365178029032800712153859236123259470725127481845894230304045470205680 =
52643637193729564725362910008901923240451540743384064093523073677878800568377571*80 .

Insomma, in conclusione, possiamo porre:

K =
52643637193729564725362910008901923240451540743384064093523073677878800568377571

ed ecco la "soluzione di Savarino" del famoso problema dei buoi di Archimede la quale soddisfa oltre la I equazione quadratica anche la II:

$A = 33462000K^2$
$B = 40154400K^2$
$C = 500385600K^2$
$D = 89232000K^2$
$A' = 250408158K^2$
$B' = 389116728K^2$
$C' = 49077600K^2$
$D' = 201469840K^2$

Risulta infatti:

$8(500385600 + 89232000)K^2 + 1 =$
13072305852888181905179279459929432845472936078905220567997810996594907903364692157095827412674988232354014757945178095800038061247546834235852756539592503549434482572801 =
$(3615564389260434939264395590098808142902710568419416713901452076202679000952100806401)^2$.

(Inutile forse sottolineare che negli ultimi calcoli ci siamo giovati di uno strumento di calcolo elettronico. Rimane quindi il legittimo dubbio espresso da Savarino che la determinazione di siffatti "numeroni", che oltre tutto non soddisferebbero sicuramente alla chiarissima condizione delle pianure siciliane, fosse al di fuori della portata della matematica greca antica...)

8.XI.2010