

Questa pagina web è dedicata a coloro che hanno scaricato dal sito la versione preliminare dell'articolo intitolato:

Una breve presentazione (critica) del teorema di incompletezza di Gödel

allo scopo di segnalare alcuni errori presenti nella detta prima versione, e le principali modifiche contenute nella nuova riveduta, ampliata e corretta (24.VI.005).

A - Errata Corrige

A1 – Il paradosso della moneta riportato nel primo paragrafo della parte III era manifestamente descritto in modo errato. Quella che segue è la descrizione corretta (con un'aggiunta di ordine storiografico):

>> [Le righe riportate costituiscono ovviamente il § 102 del libro di Beth, che si chiude con un compiaciuto rimando al § 64, dal titolo "Impossibilità di una definizione del concetto di verità entro la sintassi elementare", in cui si espongono noti risultati di Alfred Tarski, il cui più famoso lavoro relativo alla tematica qui trattata è "The concept of truth in formalized languages", 1933. Un altro modo di esporre il paradosso in parola è di pensare a una moneta, su una cui faccia siano incise le seguenti parole: "L'affermazione riportata sul retro di questa moneta è falsa", mentre sull'altra si trovi invece scritto: "L'affermazione riportata sul retro di questa moneta è vera" (si tratta di un'osservazione contenuta in un'altra lettera di G.G. Berry a Russell, vedi tra breve - nell'originale si parlava in effetti di "the other side of this paper", e corrispondentemente si fa riferimento all'argomentazione in oggetto come al *visiting card paradox*.)]

A2 – All'inizio della dimostrazione di Boolos, parte I, era presente la seguente informazione:

> (ma non insiemistici, per esempio non \in , che invece nel più ampio Gödel 1931 si usa)

dalla quale va eliminata la seconda parte, ovvero la parentesi deve essere letta semplicemente come:

>> (ma non insiemistici, per esempio non il simbolo di Peano \in).

A3 – Il paragrafo che si intitola "Alla ricerca di 'soluzioni'...", Parte III, conteneva un'argomentazione in cui si parlava di <<unica via di uscita>>. Il brano in questione deve essere più correttamente formulato nel modo seguente:

>> Ogni alternativa implica la sua opposta, e quali sono allora le possibili vie di uscita? O la funzione Φ non è così "ben definita" come sembra, [Abbiamo già notato come l'incompletezza significhi appunto l'esistenza di proposizioni indecidibili non solo del tipo

$\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \leftrightarrow F(x))$, ma anche del tipo $\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \rightarrow F(x))$.] o R non è definibile in H, ovvero non esiste alcun predicato K(x) che abbia la proprietà: K(n) è dimostrabile se e solo se $F_n(n)$ non è dimostrabile.

A4 – La nota alla fine della Parte I, relativa all'equivalenza di talune proposizioni in un sistema formale del tipo esaminato da Gödel, va corretta nella seguente maniera (aggiungiamo anche un ulteriore commento successivamente inserito).

>> [Si può osservare che la precedente proposizione Nctr non è univocamente determinata dal contesto, potendosene evidentemente immaginare molte altre delle quali sia lecito dire similmente che "esprimono" la coerenza di H. E' pertanto interessante notare che, assieme alla $Nctr \rightarrow G$, rimane stabilita anche la $G \rightarrow Nctr$ (perché G asserisce la propria indimostrabilità in H, e se H fosse contraddittorio G sarebbe dimostrabile come ogni altro asserto, sicché se la premessa è valida allora deve essere tale anche la conseguenza). Si può quindi affermare che ciascuna asserzione $Nctr^*$, la quale esprima al pari della precedente Nctr la coerenza di H, risulta "equivalente" a G (nel senso che l'asserto $Nctr^* \leftrightarrow G$ è dimostrabile in H). In particolare, tali asserzioni sono tutte (indecidibili ed) equivalenti tra di loro, sicché ha senso parlare *della* asserzione che esprime la coerenza di H, con l'articolo determinativo singolare. Riprendiamo tale ragionamento da *Handbook of Mathematical Logic*, p. 829, anche se lì viene dato piuttosto risalto alla conseguente analoga "unicità" di G: <<one may correctly speak of *the* sentence that asserts its own unprovability>>. Abbiamo preferito così avendo in mente una nota in Corrado Mangione, "La logica nel ventesimo secolo", *Storia del Pensiero Filosofico e Scientifico*, a cura di Ludovico Geymonat, p. 318, nella quale si riferisce una notizia che non siamo in grado di comprendere appieno, alla luce di quanto appena detto: <<La situazione messa in luce da Feferman ("Arithmetization of metamathematics in a general setting", 1960-61) è *grosso modo* la seguente: siccome in generale esistono *più* formule di una teoria formale sufficientemente potente che possono esprimere formalmente *uno stesso concetto* o proprietà metamatematica, egli mostra come alcuni risultati - e in particolare proprio il secondo teorema di Gödel - possono dipendere per quanto riguarda la loro validità proprio dalla scelta effettuata, ossia dalla formula che si è assunta per esprimere un dato concetto, in questo caso la noncontraddittorietà. Egli definisce quindi in modo convenzionale una scelta "canonica" seguendo la quale risultati di questo tipo vengono conservati mentre costruisce addirittura un controesempio che fa vedere come il secondo teorema di Gödel non valga nel caso di una scelta non "canonica". La questione, di evidente interesse, è attualmente oggetto di studio>>. La questione è davvero di evidente interesse, e saremmo lieti di poterne riferire di più, se ne fossimo in grado: la conclusione di Feferman sta forse a significare che esistono altre "forme" di Nctr di cui non si riesce a dimostrare la non dimostrabilità, oppure va intesa come una dimostrazione di coerenza del tipo di quella di Gentzen? Oppure, peggio, che l'argomentazione di cui in esordio è ancora più "informale" di quanto supponevamo, e che per la sua validità bisogna tenere conto di specifici particolari sulla forma di Nctr? Il dubbio che assale a questo punto è che una siffatta argomentazione di equivalenza possa ripetersi per *tutti* gli asserti indecidibili di H, ed ecco che non solo sembrerebbe davvero di essere di fronte (almeno in parte) a una gigantesca e poco istruttiva "tautologia", ma pure di dover riconoscere che, se una certa proposizione indecidibile appare poco "significativa", tale caratteristica sarebbe di necessità condivisa da ciascuna delle altre. Apparirebbe questa una circostanza capace di diminuire il valore dell'osservazione precedente, sulla rilevanza della costruzione di proposizioni indecidibili più "interessanti" (apparentemente) della G.]

[E qui v'ha luogo per un istruttivo complemento alla nota precedente, sul perché lo scrivente non è in grado di fornire maggiori ragguagli sul punto in discussione. In effetti egli non ha ricevuto una formazione "accademica" in logica matematica, e conosce unicamente ciò che è reperibile (senza troppe difficoltà pratiche) in articoli, testi, etc.. Ma ciò non basta, in quanto: <<Mathematics today is essentially an oral culture: to keep abreast of it one must attend conferences and workshops or, better yet, be associated with a leading research center where the latest developments from near

and afar are constantly being discussed>> (secondo un'azzeccatissima descrizione di David E. Rowe contenuta in un articolo istruttivo per numerosi altri aspetti, "'Jewish Mathematics' at Göttingen in the Era of Felix Klein", *Isis*, 77, 1986). Insomma, il presente articolo è quanto di meglio sia riuscito a fare un *outsider* autodidatta in certe questioni, che ha però ritenuto doveroso uscire dai poco convincenti schemi propagandistici ed auto-celebrativi della corrente *vulgata*.]

- - - - -

B – Principali modifiche

Forniamo qui di seguito per comodità del lettore un elenco delle modifiche *principali* che sono state apportate alla versione preliminare del lavoro.

B1 – Sono state inserite due nuove appendici:

E - Il teorema di incompletezza ... di Finsler

F - In (parziale) difesa di Hilbert e Russell etc.

B2 – Sono state aggiunte due epigrafi:

<<In 1930, while in his twenties, Kurt Gödel made a major announcement: Hilbert's Consistency Program could not be carried out. For, he had proven two theorems which were then considered moderately devastating and which still induce nightmares among the infirm>> (*Handbook of Mathematical Logic*, p. 825).

<<Sciocchezze quali la maggior parte dei paradossi non saranno mai minimamente prese in considerazione dalla vera logica>> (Carl Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, 1855, vol. I, p. 95 - citato da Dawson).

B3 – Alla nota sul teorema di Vaught sono state aggiunte alcune righe sul teorema di Morley:

>> E' forse interessante informare pure che, secondo un teorema di Michael D. Morley (1930, professore emerito di matematica alla Cornell University; "Categoricity in power", 1965), che risponde a una questione di Los, esistono soltanto due tipi possibili di categoricità per un sistema formale H con un linguaggio al più numerabile: la \aleph_0 -categoricità, e la \aleph -categoricità, dove \aleph è un qualsiasi cardinale diverso da \aleph_0 (cioè, categoricità numerabile e categoricità non numerabile). In altre parole, se H risulta \aleph -categorico per *qualche* cardinale \aleph non numerabile, allora H risulta anche \aleph -categorico per *qualsiasi* cardinale \aleph non numerabile. E' questo un altro curioso esempio in cui la dicotomia discreto-continuo appare rivestire un ruolo di primo piano, e secondo noi non ancora perfettamente compreso, nonostante i citati risultati di Gödel e di Cohen sull'ipotesi del continuo (utilizziamo qui il termine "discreto" semplicemente come sinonimo di numerabile; per una definizione più precisa si veda <http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/ep8/ep8-zeno-app.htm>).

B4 – E' stato sottolineato il valore "relativo" dell'osservazione relativa alla non validità del "criterio di adeguatezza" di cui all'inizio dell'ultimo paragrafo della Parte

II, ed assieme ad alcune altre annotazioni sull'intuizionismo di Brouwer è stato dato il seguente annuncio:

>> La precedente "obiezione" (sulla quale ritorneremo in maggiore dettaglio in: "Sulla forma delle proposizioni indecidibili nei sistemi formali di Gödel, ed alcune osservazioni sull'intuizionismo", nella nostra pagina web dedicata alla storia e ai fondamenti della matematica) [...]

B5 – Ancora nello stesso paragrafo, è stata ampliata la nota relativa ai risultati di Skolem sulla non-caratterizzabilità dell'aritmetica nella logica del I ordine:

>> Questo rilievo ci sembra corrispondere a quello con cui <<Hilbert liquidò il programma logicista senza batter ciglio>>, nel suo intervento al III congresso internazionale dei matematici svoltosi ad Heidelberg nel 1904: <<obiettivo sostanzialmente che il lungo e complicato sviluppo della logica comportava già la presenza dei numeri interi, anche se non li nominava espressamente; per questa ragione il tentativo di costruire il concetto di numero sulla logica si riduceva a un ragionamento circolare>> (citazione da Morris Kline, *Matematica la perdita della certezza*, 1980; trad. it. 1985, pp. 268-269). In effetti, qui la questione è di tipo tecnico, e l'interpretazione riconduce ancora una volta all'uso di termini in contrasto con la loro accezione comune. Nella logica del I ordine viene ammesso soltanto l'uso di "Zahlenvariablen", e quindi non si può per esempio formulare il principio di induzione completa, nella forma "per ogni sottoinsieme X di N etc.", perché un trattamento dei sottoinsiemi X di N , che costituiscono tra l'altro una totalità non numerabile, non rientra nelle proprietà espressive del linguaggio. Insomma, l'impressione è al solito che, ammesso pure che taluni risultati siano corretti, essi dipendano in massima parte dalle regole consentite per il gioco, che possono essere fissate in modo tale da consentire le conclusioni *a priori* desiderate: *quando un illusionista tira fuori un coniglio dal cappello, si può essere sicuri che ce l'ha nascosto dentro prima*. Ci pare interessante citare al riguardo Alexander George, "Skolem and the Löwenheim-Skolem Theorem: A Case Study of The Philosophical Significance of Mathematical Results", 1985: <<The dream of a community of philosophers engaged in inquiry with shared standard of evidence and justification has long been with us. It has led some thinkers puzzled by our mathematical experience to look to mathematics for adjudication between competing views. I am skeptical on this approach and consider Skolem's philosophical uses of the Löwenheim-Skolem Theorem to exemplify it. I argue that these uses invariably beg the question at issue. I say "uses", because I claim further that Skolem shifted his position on the philosophical significance of the theorem as a result of a shift in his background beliefs. The nature of this shift and possible explanations for it are investigated. Ironically, Skolem's own case provides a historical example of the philosophical flexibility of his theorem>>. Come dire che ci sono non solo i risultati eventualmente "aggiustati" da tenere in conto, ma anche le loro "interpretazioni": noi riteniamo comunque che non si tratti di una caratteristica connaturata a limiti epistemologici umani, e che semplici rimedi al lamentato stato di cose possano consistere semplicemente in onestà intellettuale, e sincerità nella comunicazione, due caratteristiche che vengono sfavorite dalla forte attuale competizione tra scienziati, e da un (antico di qualche secolo) uso ideologico e politico della conoscenza ("scientifica" e non).

B6 – All'inizio della Parte III è stata ampliata la nota relativa alle difficoltà interpretative e non del teorema di Gödel:

>> [Si fa torto anche allo stesso Gödel, oltre che alla "verità", con il descrivere in modo troppo semplicistico il risultato delle sue ricerche, come purtroppo è oggi assai comune. Secondo un'annotazione del febbraio 1931 di Rudolf Carnap (1891-1970, studiò con Frege a Jena e con Einstein a Berlino; esponente del cosiddetto "positivismo logico", fu in relazione con Hans

Reichenbach, insieme al quale fondò il giornale *Erkenntnis*, e con Moritz Schlick, membro di spicco del Circolo di Vienna, per il quale nel 1929 scrisse addirittura il manifesto programmatico, insieme ad Hans Hahn ed Otto Neurath, emigrò negli USA nel 1935, dove fu professore di filosofia a Chicago, Princeton, e Los Angeles, Università della California): <<Gödel hier. Über seine Arbeit, ich sage, dass sie doch schwer verständlich ist>>. Il lavoro sull'incompletezza è <<davvero difficile da capire>>, altro che storie. Tanto per offrire un ulteriore esempio di questioni alle quali chi avesse ben compreso l'argomento dovrebbe essere in grado di rispondere rapidamente, domandiamo: dato che le proposizioni G e Nctr - tra loro equivalenti - sono indecidibili, e che per il teorema di consistenza deve esistere un modello dell'aritmetica, diverso certamente da quello *standard*, in cui sono "vere" le loro negazioni, ossia $\neg G$ e $\neg Nctr$, qual è quel modello, e quale l'"interpretazione" in esso delle proposizioni $\neg G$ e $\neg Nctr$? (Almeno, per quanto riguarda le geometrie non euclidee, che vengono spesso chiamate ad esemplificare la problematica in oggetto, loro "modelli euclidei" sono perfettamente costruibili e comprensibili, pensiamo per esempio a quelli di Klein e di Poincaré.)]

B7 – Sono state ampliate le informazioni dedicate all'ipotesi del continuo:

>> [Il primo dei 23 problemi (secondo la versione a stampa; di questi soltanto 10 furono in realtà presentati da Hilbert al pubblico di Parigi, tra i quali i primi due, mentre un altro relativo alla teoria della dimostrazione fu invece omesso nella stesura finale, pur essendo stato discusso verbalmente) era invece dedicato alla cosiddetta *ipotesi del continuo*: <<1. Cantor's Problem of the Cardinal Number of the Continuum. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving. This is the theorem: Every system of infinitely many real numbers, *i.e.*, every [infinite] assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,... or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line [...]>> (si dice invece *ipotesi generalizzata del continuo* quella secondo la quale non esisterebbe alcun numero cardinale strettamente compreso tra un qualsiasi numero cardinale infinito \aleph e 2^{\aleph} , la cardinalità del relativo insieme delle parti). E' doveroso informare che lo stesso Gödel lavorò a lungo su tale questione, pervenendo, in tre articoli pubblicati tra il 1937 e il 1940 ("The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis", "Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis", "The consistency of the continuum hypothesis"), a un risultato di *compatibilità* dell'ipotesi del continuo con gli altri assiomi della teoria degli insiemi (per esempio quelli costituenti il cosiddetto sistema di Zermelo-Fränkel-Skolem, comprensivo dell'assioma della scelta), mentre quella che appare oggi una soluzione definitiva del problema, in termini di un risultato di *indipendenza*, venne fornita soltanto nel 1963 da Paul Joseph Cohen (1934, dopo il suo celebre teorema divenne professore a Stanford, ed ottenne la medaglia Fields nel 1966, durante i lavori del XV Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Mosca), ancora in tre articoli: "A minimal model for set theory", "The independence of the continuum hypothesis I, II".]

B8 – All'inizio dell'appendice B è stata estesa la nota relativa a un importante controfattuale storico:

>> [Naturalmente, entrando nel campo sempre affascinante del *controfattuale* storico, la domanda che sorge inevitabile è: tale settore di studi avrebbe potuto avere origine altrimenti, a partire cioè da impostazioni filosofiche meno discutibili, ovvero non così smaccatamente anti-intuitive, o se si preferisce anti-antropocentriche?! Un'analoga domanda potrebbe porsi per l'altro *totem* (e *tabù*) della scienza del XX secolo, la teoria della relatività (non è secondo noi un caso che Einstein e Gödel fossero buoni amici a Princeton, e che il secondo abbia pure trovato, nel 1949, delle traiettorie nel quadro della relatività generale, le quali, piuttosto che essere interpretate come un segno di non-adequatezza della teoria, hanno offerto fondamento scientifico alla concezione di un "tempo circolare", e suggerito spunto per l'assurda convinzione che siano possibili viaggi a ritroso

nel tempo; Piergiorgio Odifreddi parla addirittura, nella sua introduzione a una recentissima riedizione di *L'ABC della relatività* di Russell, addirittura di "Santissima Trinità Intellettuale", aggiungendo ai due personaggi testè nominati anche il divulgatore inglese): le ricerche sull'energia nucleare avrebbero potuto svilupparsi anche senza relatività? Forse è proprio per non dare a tale domanda risposte diverse da quella oggi comune che le "strategie culturali del potere imperiale" non hanno finora permesso di chiarire diversi punti oscuri nello svolgimento di dette ricerche nella Germania del III Reich, condotte da scienziati per lo più anti-relativisti (addirittura *eteristi*). In tema, non può non venire alla mente l'analoga connessione che viene fatta dalla propaganda dei vincitori tra episodi relativi alla II guerra mondiale e un altro dei protagonisti della nostra storia (storia naturalmente "minore"), e cioè Alan Turing e il cosiddetto "progetto Enigma" (così a naso, ci sembra più verosimile supporre che certi successi siano riconducibili piuttosto ad operazioni di *intelligence*, e alla presenza di insospettabili "collaboratori" in campo nemico, che non a particolari abilità logico-matematiche-organizzative).]

B9 – All'inizio del "Congedo" è stata inserita la seguente nota sulle relazioni tra la logica matematica e la cosiddetta "intelligenza artificiale":

>> [Naturalmente, entrando nel campo sempre affascinante del *controfattuale* storico, la domanda che sorge inevitabile è: tale settore di studi avrebbe potuto avere origine altrimenti, a partire cioè da impostazioni filosofiche meno discutibili, ovvero non così smaccatamente anti-intuitive, o se si preferisce anti-antropocentriche?! Un'analoga domanda potrebbe porsi per l'altro *totem* (e *tabù*) della scienza del XX secolo, la teoria della relatività (non è secondo noi un caso che Einstein e Gödel fossero buoni amici a Princeton, e che il secondo abbia pure trovato, nel 1949, delle traiettorie nel quadro della relatività generale, le quali, piuttosto che essere interpretate come un segno di non-adequatezza della teoria, hanno offerto fondamento scientifico alla concezione di un "tempo circolare", e suggerito spunto per l'assurda convinzione che siano possibili viaggi a ritroso nel tempo; Piergiorgio Odifreddi parla addirittura, nella sua introduzione a una recentissima riedizione di *L'ABC della relatività* di Russell, addirittura di "Santissima Trinità Intellettuale", aggiungendo ai due personaggi testè nominati anche il divulgatore inglese): le ricerche sull'energia nucleare avrebbero potuto svilupparsi anche senza relatività? Forse è proprio per non dare a tale domanda risposte diverse da quella oggi comune che le "strategie culturali del potere imperiale" non hanno finora permesso di chiarire diversi punti oscuri nello svolgimento di dette ricerche nella Germania del III Reich, condotte da scienziati per lo più anti-relativisti (addirittura *eteristi*). In tema, non può non venire alla mente l'analoga connessione che viene fatta dalla propaganda dei vincitori tra episodi relativi alla II guerra mondiale e un altro dei protagonisti della nostra storia (storia naturalmente "minore"), e cioè Alan Turing e il cosiddetto "progetto Enigma" (così a naso, ci sembra più verosimile supporre che certi successi siano riconducibili piuttosto ad operazioni di *intelligence*, e alla presenza di insospettabili "collaboratori" in campo nemico, che non a particolari abilità logico-matematiche-organizzative).]