(Versione riveduta e corretta il 26.V.007.)

\- - - - -

Una breve presentazione (critica) del teorema di incompletezza di Gödel

> <<In 1930, while in his twenties, Kurt Gödel made a major announcement: Hilbert's Consistency Program could not be carried out. For, he had proven two theorems which were then considered moderately devastating and which still induce nightmares among the infirm>> (*Handbook of Mathematical Logic*, p. 825).

[Queste pagine intendono fornire una presentazione sintetica del celebre teorema, e della problematica ad esso collegata. Sono soprattutto pensate per gli studenti del corso di "Storia delle Matematiche", che non hanno mai seguito un corso sistematico di "Logica Matematica", e quindi come un'integrazione delle lezioni orali. Anche per questo motivo esse presentano alcuni evidenti "squilibri" (per esempio, pure concetti di non comune dominio sono stati utilizzati senza le opportune spiegazioni, che sono state solo in qualche caso rinviate a un successivo commento), ma si confida comunque che possano nel complesso essere di giovamento anche ad altro tipo di lettori "indipendenti". Aggiungiamo che abbiamo cercato di eccedere nella compilazione dei riferimenti bibliografici, e che ci siamo limitati a fornire qualche notizia biografica unicamente per quei personaggi che, seppur rilevanti per una storia della logica, non appariranno con una voce a sé nelle nostre "dispense" (*Breve profilo storico della matematica*).]

\- - - - - - -

Parte I

Sia H un qualsiasi **sistema formale** (è questo l'oggetto centrale di studio della *logica matematica*), vale a dire un "complesso" costituito da:

1 - un *alfabeto* A, o A(H), di *termini indefiniti* (o *segni*, o *simboli*)
(A viene considerato di solito finito o numerabile, un'ipotesi questa che talvolta mostrerà tutta la sua rilevanza);
2 - un insieme di *regole di formazione* che consentono la decisione "automatica" in ordine a quali elementi di W(A) (l'insieme delle *stringhe*, o *parole*, costruite sull'alfabeto A) sono da ritenersi *formule ben formate* di H (a questo punto dell'elaborazione potremmo dire di essere di fronte a un *linguaggio*), il cui insieme potremo dire F, o F(H);
3 - un insieme Ax, o Ax(H), di formule ben formate i cui elementi verranno detti *assiomi* di H (al solito, è importante che un "calcolatore" convenientemente istruito possa decidere automaticamente, data una formula ben formata, se essa è o no un elemento di Ax);
4 - un insieme di *regole di inferenza* (o *derivazione*) che permettono di decidere, sempre "automaticamente", quali elementi di W(W(A)) sono *dimostrazioni* di formule ben formate di H (che verranno dette *dimostrabili*, o *derivabili*).

(Una dimostrazione va intesa come una catena finita di formule ben formate di H, ciascuna delle quali o è un assioma, o è *conseguenza diretta* di un certo numero di formule precedenti nella catena. Una formula ben formata che appaia come ultimo elemento in una dimostrazione si dice un *teorema* di H, e il loro insieme verrà denominato con Th(H). Una formula ben formata α che sia un teorema di H si dice anche dimostrabile, o derivabile, in H, simbolo: $H \vdash \alpha$. Il concetto di conseguenza diretta si intende costruito mediante un insieme finito di relazioni, $R_1,...,R_n$, rispettivamente k_1-aria,...,k_n-aria, numeri naturali maggiori di 1, tali che, se per qualche indice i sussiste la relazione $R_i(f_1,...f_{ki})$, allora f_{ki} è conseguenza diretta delle k_i-1 formule che la precedono nel segno di relazione.)

Un sistema formale va inteso come "assolutamente" formale, nel senso che né segni, né assiomi, *etc.*, hanno qualche "senso" diverso da quello fissato dalle regole del gioco. E' ovvio però che ci sono sistemi formali più "interessanti" degli altri, per esempio uno di quelli che costituiscono l'oggetto di studio della cosiddetta *logica degli enunciati*, o *logica proposizionale*. Segni di un tale sistema formale sono un numero finito di *variabili proposizionali* (noi preferiremmo "costanti" in luogo di "variabili"), o *segni enunciativi*, $P_1,...,P_m$, più i *connettivi logici*: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ai quali aggiungiamo delle parentesi: (,) , intese come puri segni formali (il numero dei connettivi logici potrebbe essere diminuito senza perdita di generalità, ma non vale la pena insistere su certi dettagli). La scelta dei segni prelude all'"interpretazione" che si vuol dare di un sistema formale del tipo precedente, e per esempio essi sono già in grado di far comprendere, senza soffermarcisi in maniera esplicita, quali formule di un tale linguaggio siano ben formate oppure no. Gli assiomi del sistema sono in un primo momento fissati nel modo seguente:

I - $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha))$
II - $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$
III - $(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow((\neg\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow\beta)$

per ogni terna α, β, γ di formule ben formate di H (I, II e III sono quelli che si dicono *schemi di assiomi*).
L'unica regola di inferenza che viene fissata è il *modus ponens*: una formula ben formata β è conseguenza diretta di α e $\alpha\rightarrow\beta$.
Scatta allora il gioco della individuazione degli elementi che costituiscono Th(H), ma qual è il "senso" di questo gioco?
Se noi abbiamo un insieme di m affermazioni $A_1,...,A_m$ all'interno di un certo "insieme di conoscenze", che possono essere *vere* o *false* (nel qual caso le loro negazioni saranno vere), possiamo far corrispondere ad esse i segni enunciativi di cui sopra: siamo così di fronte a un *modello* del sistema formale in oggetto. Costruita un'affermazione a partire dalle m assegnate, con l'uso di connettivi logici adesso *non formali*, che potremmo indicare con et, vel, neg, seq, aeq (con manifesto significato

delle abbreviazioni; tali connettivi logici non formali sono definiti mediante le ben note *tavole di verità*, sulle quali qui non ci dilunghiamo), il problema che si pone è stabilire se un'affermazione *generata* in modo corretto mediante le m affermazioni iniziali e detti connettivi logici non formali, sia oppure no *vera* nel modello prescelto. Tale circostanza può essere stabilita autonomamente con un algoritmo che fa ricorso alle menzionate tavole di verità, ma vediamo in che senso tale questione può essere ricondotta al sistema formale appena descritto. E' subito chiaro intanto che in un tale contesto contano unicamente i valori di verità delle m affermazioni di cui trattasi, per esempio tutte vere: 1,1,...,1 (m volte), oppure tutte false: 0,0,...0 (m volte), o una qualsiasi delle 2^m-2 possibilità intermedie (nel senso che se in luogo delle affermazioni $A_1,...,A_m$ se ne introducono altre $B_1,...,B_m$ con i medesimi valori di verità, allora le risposte saranno identiche per proposizioni corrispondenti). Orbene, un'affermazione generata nella maniera indicata dalle m affermazioni di partenza è vera nel modello prescelto, se e soltanto se la sua "corrispondente formale" è derivabile nel sistema formale H sopra descritto, purché si abbia l'accortezza di aggiungere alla lista di assiomi tutti quei segni enunciativi (i quali sono formule ben formate secondo le opportune regole di formazione) che corrispondono nel modello ad affermazioni vere, più tutte le negazioni di quei segni enunciativi che nel modello corrispondono invece ad affermazioni false (questo è il cosiddetto *teorema di completezza della logica proposizionale*). Se non si inserisce tra gli assiomi nessun segno enunciativo, e nessuna sua negazione, allora una formula ben formata è un teorema di H se e soltanto se essa corrisponde a un'affermazione che è vera per *ogni* modello del sistema (cioè, per ciascuna delle menzionate 2^m assegnazioni dei valori di verità: una di esse si definisce anche una *valutazione* del sistema), ossia a quella che si dice una *tautologia*.

Assai più significativi dei sistemi che appartengono alla famiglia di cui sopra, sono quelli nei quali le regole del gioco vengono ampliate introducendo dei *segni di variabile* (con un segno x e un apice se ne ha a disposizione subito un'infinità numerabile: x, x', x''',...), dei *segni di costante* (come prima, per esempio, c,c',c'',...), due *simboli quantificatori* (∀, ∃), gli stessi *connettivi logici* di prima, *parentesi* ed eventuali *segni di punteggiatura*, tanto per maggiore chiarezza quando necessari, un *segno di uguaglianza* (noi useremo =, ma alcuni propongono un simbolo diverso per non fare confusione con il segno di uguaglianza non formale), dei *segni di funzione* e *di relazione*, ciascuno in un conveniente numero di "variabili" (in qualche caso nel sistema potranno non essere presenti alcuni dei segni sopra elencati, ovvero il loro insieme essere vuoto).

Siamo così entrati nel regno della cosiddetta *logica dei predicati* (*del primo ordine*; i quantificatori possono essere per esempio messi soltanto prima di segni di variabile, e non quantificare segni di funzione o di relazione, sulla questione torneremo nel seguito), in cui è chiaro come funzioneranno le regole di formazione, preposte alla individuazione delle formule ben formate. Adesso sarà possibile parlare di formule ben formate *chiuse*, ossia prive di *variabili libere* (tali particolari espressioni sono dette anche *enunciati*, o *asserti*, o *proposizioni*, o *sentenze*, di H), o di *predicati monadici*, *diadici*, *etc.*, nei quali compaiono rispettivamente una variabile libera, due variabili libere, *etc.* (vale a dire, variabili non saturate da qualche segno quantificatore).

[Volendo, si potrebbe ancora una volta ripetere un discorso relativo a una diminuzione dei segni: per esempio, $\exists x(P(x))$, dove $P(x)$ è un qualsiasi predicato monadico con variabile libera x, potrebbe essere considerato come una semplice abbreviazione per $\neg\forall x(\neg P(x))$.]

Tra gli assiomi si elenca senz'altro un primo gruppo di *assiomi logici*, definiti mediante i seguenti schemi di assiomi:

I - $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha))$
II - $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$
III - $(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)\rightarrow((\neg\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow\beta)$
(al solito, per ogni terna α, β, γ di elementi di F(H))
IV - $\forall x(\alpha(x))\rightarrow\alpha(t)$ (specializzazione, o sostituzione)
(qui $\alpha(x)$ è un qualsiasi predicato in cui x appare come variabile libera, oppure non appare per nulla, non escludendosi con tale comodo simbolismo che in α vi siano delle altre variabili libere; t è un qualsiasi *termine* di H *libero per x in* $\alpha(x)$; termini di H sono i segni di variabile e di costante, inoltre se f è un segno funzionale n-ario, e $t_1,\ldots,t_n$ sono termini, allora $f(t_1,\ldots,t_n)$ è pure un termine di H; t è libero per x in P(x) quando nessuna occorrenza libera di x in $\alpha(x)$, se ve ne sono, si trova nel campo d'azione di un quantificatore del tipo $\forall y$, dove y è una variabile presente nel termine; y va intesa qui come un'abbreviazione per uno dei segni di variabile $x^{'\cdots'}$)
V - $(\forall x(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow(\alpha\rightarrow\forall x(\beta))$
(per ogni formula ben formata α di H che non contenga occorrenze libere di x).

A tale infinità di assiomi si potrà aggiungere "a piacere" un insieme (sempre "decidibile" nel senso prima accennato) di *assiomi* veri e propri di H, i quali dovranno essere però attualmente delle formule ben formate chiuse.
Le regole di inferenza che decideranno quali catene di formule ben formate di H siano *dimostrazioni* di *asserti* di H (che verranno detti *dimostrabili*, o *derivabili*), sono soltanto due. Lo "stesso" *modus ponens* della logica proposizionale, e una *regola di generalizzazione*:
- $\forall x(\alpha)$ è conseguenza diretta di α.

(I primi rudimenti di logica matematica si possono studiare ovviamente in tanti libri, tra i quali ci sembra particolarmente apprezzabile: Elliot Mendelson, *Introduzione alla Logica Matematica*, Boringhieri, Torino, 1972, a cui ci siamo ispirati nella precedente esposizione, necessariamente sintetica e in qualche punto pure "approssimativa".)

Concetti rilevanti associati:

- Un sistema formale H, di quelli facenti parte o della logica degli enunciati o della logica dei predicati, si dice *coerente* se non esistono asserti α di H tali che α sia dimostrabile insieme a $\neg\alpha$.

[La coerenza, o *non-contraddittorietà*, di H, equivale alla circostanza che esistono asserti α non dimostrabili in H; ossia, in un sistema contraddittorio ogni asserto è dimostrabile. Infatti, ricordando che si usa il simbolo $\vdash$ per "dimostrabilità", è chiaro che se $H \vdash \alpha$ per ogni asserto α, allora in H sono dimostrabili sia α sia $\neg\alpha$. Viceversa, se $H \vdash \beta$ e $H \vdash \neg\beta$ per qualche asserto β, allora $H \vdash \beta\wedge\neg\beta$, e poiché risulta pure $H \vdash (\beta\wedge\neg\beta)\rightarrow\alpha$ per qualsiasi α (si tratta di una relazione valida in ogni caso, vale a dire una tautologia, corrispondente alla circostanza che la premessa dell'implicazione è sempre falsa - *ex falso quodlibet*), ecco infine che $H \vdash \alpha$ per *modus ponens* (per qualsiasi coppia di asserti α e β, se $H \vdash \alpha$ e $H \vdash \alpha\rightarrow\beta$, allora le regole di derivazione ammesse fanno "seguire immediatamente" $H \vdash \beta$).
Si osservi che l'uguaglianza Th(H) = F(H) fornisce una definizione di sistema incoerente, e quindi, quando tale identità non occorra, di sistema coerente, per un sistema formale qualsiasi, in cui il segno $\neg$, con la sua "interpretazione" descritta dalle regole del gioco, non è presente.
Non sarebbe difficile infine dimostrare che uno qualsiasi dei sistemi formali dianzi descritti appartenenti all'ambito della logica proposizionale è sempre coerente.]

- <u>Teorema di adeguatezza, o di consistenza</u>: Un sistema formale H del tipo di quelli facenti parte della logica dei predicati è coerente ses ammette un *modello*.

[Un modello di un sistema formale H del tipo in parola è prima di tutto una "struttura" per il linguaggio L di H, avente come supporto un certo insieme X, in cui tutti gli enti che costituiscono L vengono "interpretati", per il tramite di: elementi di X; funzioni, a un certo numero di valori, su X; relazioni, a un certo numero di valori, su X, *etc.*. Si aggiunge poi che nella struttura X risultano soddisfatti tutti gli asserti che sono stati elencati come assiomi (extra-logici) di H. Così, un singolo gruppo diventa per esempio un modello per un sistema formale che rappresenti la "teoria dei gruppi", il cui linguaggio dovrà allora contemplare un simbolo per la funzione prodotto, un altro per l'elemento neutro, *etc.*. In un certo senso, la sufficienza della condizione espressa dal teorema di consistenza è un'assunzione *a priori*, che si fonda sulla presunta coerenza della teoria degli insiemi. Gli asserti dimostrabili in H risultano "veri" in ogni modello di H, potremmo dire *assolutamente veri*, mentre gli asserti non dimostrabili potranno essere di due tipi: quelli non dimostrabili perché "falsi" in ogni modello di H - *assolutamente falsi* - e quelli non dimostrabili perché veri in qualche modello di H, e falsi in qualche altro, cioè, asserti che possono dirsi *relativamente veri*, o se si preferisce *relativamente falsi*.]

- Teorema di completezza (Gödel, 1930): Assegnati un qualsiasi sistema formale coerente H del tipo specificato, e un qualsiasi asserto α di H, $H \vdash \alpha$ è la stessa cosa che $H \models \alpha$.

(Il simbolo $\models$ significa che l'asserto α è *vero* in ogni modello di H - si parla anche di *validità* di α in H).

Il teorema di completezza è una diretta conseguenza del teorema di consistenza, sicché ci sembra opportuno accennare a una sua possibile dimostrazione. Risultando come detto scontata l'implicazione $H \vdash \alpha \Rightarrow H \models \alpha$ (stiamo usando qui evidentemente un segno di implicazione non formale), supponiamo dunque che sia $H \models \alpha$, ma che non sia $H \vdash \alpha$. Ne consegue allora che H non può dimostrare neppure $\neg\alpha$ (in simboli $H \nvdash \neg\alpha$), perché altrimenti α non potrebbe essere vero in ogni modello di H, ossia α è come si dice *indecidibile* in H (né α né $\neg\alpha$ sono dimostrabili). Se ne trae che i sistemi (H,α) e $(H,\neg\alpha)$, con cui indichiamo i sistemi che si ottengono rispettivamente da H con l'aggiunta di α o di $\neg\alpha$ in qualità di assiomi, sono entrambi coerenti. Infatti, se (H,α) per esempio non fosse coerente, allora in esso sarebbe dimostrabile ogni asserto, per esempio $(H,\alpha) \vdash \neg\alpha$. Saremmo dunque di fronte alle due relazioni $H \vdash \alpha\vee\neg\alpha$ (l'asserto $\alpha\vee\neg\alpha$ è una *tautologia*, ovvero è "universalmente dimostrabile") e $(H,\alpha) \vdash \neg\alpha$, dalle quali si dedurrebbe $H \vdash \neg\alpha$, contro l'ipotesi. Ciò premesso, esisterà allora in particolare, per il teorema di consistenza, qualche modello M di $(H,\neg\alpha)$, che sarà per costruzione anche un modello di H. In M deve essere valida $\neg\alpha$, e quindi non può essere valida α (pena incoerenza), contrariamente all'ipotesi $H \models \alpha$. [Nel corso della dimostrazione si è fatto ricorso al seguente "intuitivo" lemma: se A e B sono due proposizioni di un sistema formale H, tali che $H \vdash A\vee B$, e $(H,A) \vdash B$, allora $H \vdash B$. In effetti, $(H,A) \vdash B \Rightarrow H \vdash A\rightarrow B$, a norma del cosiddetto "teorema sintattico di deduzione di Herbrand-Tarski" (Ettore Casari, *Lineamenti di Logica matematica*, p. 214; Jacques Herbrand, 1908-1931, scomparve tragicamente durante un incidente alpinistico mentre si trovava a perfezionare i suoi studi a Göttingen; Alfred Tarski, 1902-1983, tra i principali esponenti della famosa scuola di logica polacca, professore a Varsavia, collegato a Gödel e al famoso Circolo di Vienna, nel 1939 si rifugiò per motivi razziali negli USA, dove fu professore a Princeton e a Berkeley), sicché si ha:

H $\vdash$ A∨B ⇔ H $\vdash$ (¬A)→B et H $\vdash$ A→B ⇒ H $\vdash$ (A∨¬A)→B ⇒ H $\vdash$ B, perché A∨¬A è una *tautologia* (ovvero, H $\vdash$ A∨¬A, per ogni asserto A, e la conclusione si raggiunge ancora una volta per *modus ponens*.]

[La dimostrazione del teorema di completezza oggi comunemente utilizzata è quella stabilita nel 1949 in "The Completeness of the First-Order Functional Calculus" da Leon Henkin (attuale professore emerito presso l'università di Berkeley, California, conseguì il dottorato a Princeton nel 1947 sotto la guida di Alonzo Church, un logico che avremo modo qui di nominare spesso; notiamo in rete una recente conferenza di Henkin dal titolo assai provocatorio: "Do mathematicians really know what they are talking about?" - Alonzo Church, 1903-1995, si addottorò a Princeton nel 1927, e vi divenne professore sin dal 1929, trasferendosi infine nel 1967 all'Università della California, Los Angeles).]

I due teoremi appena enunciati stabiliscono una connessione tra *livello sintattico* e *livello semantico* del discorso, un discorso che, per come abbiamo fissato le premesse, si svolge nell'ambito di quella che abbiamo detta la *logica del I ordine* (vedi anche l'appendice C). [Analogamente, è opportuno distinguere tra un ambito propriamente matematico, e uno invece *metamatematico*, relativo cioè a un discorso *sulla* matematica formale, fino ad arrivare all'introduzione di un simbolismo diverso a seconda del contesto nel quale si vogliono sviluppare le argomentazioni. Per esempio, si può utilizzare *om* (*omnis*) al posto di ∀, *ex* al posto di ∃, *seq* al posto del simbolo di implicazione logica formale → (al posto di *seq* usiamo invece tradizionalmente nelle nostre lezioni, e abbiamo usato anche qui appena sopra, il simbolo metamatematico ⇒), *etc.*.]

Sia adesso H un qualsiasi sistema formale del tipo specificato, con un *insieme decidibile* di assiomi, che "permetta di esprimere al proprio interno" l'aritmetica (ciò che implica condizioni sul linguaggio di H, e sul sistema di assiomi). Orbene, **se H è coerente**, allora esistono asserti α di H *indecidibili* (Teorema di incompletezza, Gödel, 1931). Con il precedente simbolismo, valgono contemporaneamente: H $\nvdash$ α e H $\nvdash$ ¬α.

(Se l'insieme degli assiomi di H è finito, allora esso è certo "decidibile", un concetto su cui si avrà occasione di tornare in seguito. Se tale insieme è infinito, la condizione di decidibilità significa, come abbiamo già accennato, che gli assiomi debbono essere individuabili, nell'insieme di tutti gli elementi di W(L), mediante un "algoritmo", un "automatismo"; in altre parole ancora, deve esistere una "procedura", o "programma", le cui caratteristiche si possono precisare in termini matematici, che sia capace di distinguere gli assiomi dai non assiomi.)

[Il termine "incompletezza" si riferisce alla circostanza che un sistema formale si dice al contrario *completo* quando, comunque dato un asserto α, in esso sia possibile o dimostrare α, o dimostrare la sua negazione ¬α. Per esempio, un sistema formale H che esprima la teoria dei gruppi non è manifestamente completo, poiché l'asserto α ≡ ∀x∀x'(xx'=x'x) non è dimostrabile, e non è tale neppure la sua negazione (il simbolo ≡, di ovvio significato, appare qui in palese funzione metamatematica, al posto del simbolo sintattico =). Il sistema H' ottenuto da H con l'aggiunta dell'asserto α come assioma diventa la teoria dei gruppi abeliani, mentre il sistema H" ottenuto da H con l'aggiunta dell'asserto $\neg\alpha$ diventa la teoria dei gruppi non abeliani. Naturalmente, H' ed H" sono entrambi coerenti se H è coerente. Come dire che *l'incompletezza di un sistema formale non è cosa da stupire*, a meno che naturalmente essa non sia associata a una presunta "categoricità" del sistema, ma sulla questione avremo modo di tornare. Limitiamoci presentemente soltanto ad osservare che il termine "completezza" riferito al teorema di Gödel del 1930 non appare del tutto opportuno, dato che completezza si usa anche nell'accezione sopra specificata: ciò ci sembra un'altra delle incongruenze terminologiche cui accenneremo nel presente scritto, causa di numerosi equivoci presso gli interlocutori meno esperti.]

[Gödel costruì in realtà nel 1931 un asserto G tale che H $\nvdash$ G sotto l'ipotesi della semplice coerenza di H, mentre per la seconda parte del teorema, relativa all'affermazione H $\nvdash$ $\neg$G, trovò necessario un rafforzamento dell'ipotesi di coerenza in quella di una cosiddetta **ω-coerenza** (su cui presto diremo qualche parola). Fu John Barkley Rosser (1907-1989, Ph.D. a Princeton nel 1934, successivamente professore presso l'Università del Wisconsin-Madison; fu anche presidente della Association for Symbolic Logic, della Society of Industrial and Applied Mathematics, membro del comitato di consulenti del Progetto Apollo, dello sviluppo del missile Polaris, direttore dell'U. S. Army Mathematics Research Center) il primo ad eliminare tale condizione inutilmente restrittiva nel 1936, sicché alcuni parlano di teorema di incompletezza di Gödel-Rosser.]

Il teorema di incompletezza è un corollario quasi immediato del:

<u>Teorema di indecidibilità</u> (Church, 1936; Turing, 1937): Un qualsiasi sistema formale H del tipo precedente è indecidibile.

(Vale a dire, l'insieme delle proposizioni dimostrabili di H è indecidibile, seppur esso sia ricorsivamente numerabile. Vale a dire, è sempre possibile scorrere con un algoritmo tutte le dimostrazioni corrette in W(W(L)), e contrassegnare come un "teorema" di H l'ultima stringa costituente una di queste dimostrazioni - sequenze di stringhe, o stringhe di stringhe. Il teorema di Church-Turing consiste sostanzialmente nell'affermazione che l'insieme delle proposizioni indimostrabili di H, complementare del precedente, non è ricorsivamente numerabile. In effetti, essendo possibile, come abbiamo detto, immaginare una procedura che enumera tutte le proposizioni dimostrabili che incontra, riconoscendo progressivamente le loro dimostrazioni, allora, assegnata una fissata proposizione P come *input* alla "macchina", questa si ferma senz'altro prima o poi se P è dimostrabile, perché la trova nella "lista" (un "problema di decisione", o *Entscheidungsproblem*, viene in tale maniera formulato come un "halting problem"). Possiamo impostare la macchina in modo tale che si fermi senz'altro anche se incontra $\neg$P, ossia se $\neg$P è dimostrabile, *ergo*, la macchina si ferma sempre, qualunque sia l'*input*, se H è completo. Quindi, se esistono invece delle proposizioni P per cui la macchina non si ferma, come dichiara il teorema in oggetto, ecco che H deve essere necessariamente incompleto. Ciò equivale a dire che non esiste un'analoga lista ricorsiva per le proposizioni indimostrabili, perché se essa esistesse, ecco che potremmo immaginare una macchina la quale, comunque assegnato un *input* P, vada a guardare alternativamente nella prima lista e nella seconda, finché si fermerebbe certamente quando trova P, che compare di necessità o in una lista o nell'altra. Potrebbe sembrare che, viceversa, l'incompletezza implichi l'indecidibilità, poiché, assegnata alla macchina una proposizione P indecidibile come *input*, ecco che essa non si fermerà mai andando a scorrere la lista delle proposizioni dimostrabili (in cui non compaiono né P né $\neg$P), ma questa è un'indecidibilità particolare, mentre il teorema afferma in generale che non esiste alcun algoritmo che possa "separare" le proposizioni dimostrabili da quelle indimostrabili. In altre parole ancora, la funzione caratteristica del sottoinsieme delle proposizioni indimostrabili nell'insieme di tutte le proposizioni di H non è una funzione ricorsiva, i cui valori siano tutti calcolabili (appunto, decidibili) per mezzo di un "programma". Su tali concetti torneremo un poco in seguito, ma ci preme sottolineare subito che qui, dimostrazioni a parte, è talora difficile anche solo comprendere appieno il senso degli enunciati: un'esperienza inusuale in altri settori della matematica, in cui capita di utilizzare pure frequentemente un teorema, senza rammentarne la dimostrazione, oppure ignorandola del tutto. [Tanto per offrire un esempio della lamentata situazione, ci sembra che la "Refutation of Alonzo Church's theorem of the Entscheidungsproblem unsolvability" di Fernando Romero (http://www.deducing.com/rotc.html), seppure ispirata da secondo noi "buoni" propositi, si fondi tutta su un equivoco che ha origine in una incomprensione di certi "dettagli".])

Gödel nel 1931 costruì la detta proposizione indecidibile G utilizzando in qualche modo il *paradosso del mentitore*, e il *paradosso di Richard* (meglio dire: di Cantor-Richard, come fa Hermann Weyl in *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*, una convenzione a cui qui ci adegueremo). L'esibire altre proposizioni indecidibili - e specifichiamo: nel campo dell'aritmetica - diviene pertanto importante se si vuole far apprezzare meglio un teorema che presenta senz'altro a prima vista alcune difficoltà di "interpretazione". E' allora interessante a tale riguardo la dimostrazione del teorema di incompletezza fornita nel 1989 da George Boolos (1940-1996, fu professore presso il Department of Linguistics and Philosophy del Massachusetts Institute of Technology) basandosi sul *paradosso di Berry* (una simile argomentazione era stata peraltro già formulata da Gregory J. Chaitin, un entusiasta sostenitore del "paradigma dell'incertezza", in: "Information-theoretic limitations of formal systems", 1974). Questi arriva a una proposizione indecidibile del tipo $\forall x(F(x)\leftrightarrow x=\lceil n \rceil)$, essendo n un numero naturale, $\lceil n \rceil$ il "numero formale" ad esso associato ($\lceil n \rceil \equiv$ SS...S0 - come vedremo nel successivo paragrafo dedicato specificamente alla dimostrazione di Boolos, S è il "segno" che corrisponde all'operazione di successivo, e 0 il segno che corrisponde allo zero), F(x) un *predicato monadico* (avente cioè x come unica variabile libera) "ben formato". Si sa oggi, pure in connessione con gli studi sul 10^o problema di Hilbert effettuati da Yuri Matiyasievitch (traslitteriamo dal russo in modo inconsueto, ma più conforme all'esatta pronuncia del cognome) intorno agli anni '70, che esistono proposizioni indecidibili dell'aritmetica con una *veste diofantea*: cioè, esistono proposizioni indecidibili del tipo $\exists\underline{x}(P(\underline{x})=0)$, dove $\underline{x}$ è un complesso di indeterminate sull'anello degli interi relativi Z, e $P(\underline{x})$ un polinomio a coefficienti in Z. [<<10. Determining the solvability of a Diophantine equation. Given a Diophantine equation with any number of unknowns and with rational integer coefficients: devise a process, which could determine by a finite number of operations whether the equation is solvable in rational integers>>. Secondo l'opinione comune, Matiyasievitch ha dimostrato che anche a questo problema si deve dare risposta negativa, seppur l'autore stesso sostenga: <<The reformulation of Hilbert's Tenth Problem [...] could be criticized as well [...] Hilbert did not impose any restrictions on the desired method for solving the Tenth Problem>> - al riguardo si veda anche l'appendice C. Quando si parla di aritmetica e di numeri naturali, la confusione è di rigore tra l'insieme $N = \{1, 2, 3,...\}$, e l'insieme $N_0 = \{0, 1, 2, 3,...\}$. Noi chiamiamo numeri naturali i primi, ma la più comune attuale tendenza è di includere tra essi anche lo 0. Lasciamo allo studente il (si spera non difficile) compito di districarsi tra le due terminologie, individuando da sé quei (pochi?!) casi nei quali la differenza diventa significativa.]

Sia infine Nctr(H) un asserto di H che si può convenire "esprimere" la non contraddittorietà (coerenza) di H, per esempio $\neg\exists x(\forall x'(x'=\ulcorner n \urcorner \wedge D(x,x')))$, dove n è il numero di Gödel corrispondente all'asserto 0=S0, e D(x,x') il *predicato diadico* di cui diremo meglio nel I paragrafo della parte II, corrispondente alla relazione numerica D(p,q) che formalizza la "dimostrabilità" in H (la dimostrazione avente numero di Gödel p dimostra l'asserto avente numero di Gödel q; viene così in definitiva affermato che 0=S0 non è dimostrabile in H). Nel corso della dimostrazione del teorema di incompletezza ci si imbatte nella circostanza che l'asserto Nctr(H)$\leftrightarrow$G risulta dimostrabile (in H), il che implica che Nctr(H) stessa è indimostrabile. Infatti, vale in particolare Nctr(H)$\rightarrow$G, sicché se Nctr(H) fosse H-dimostrabile, ecco che G stessa sarebbe tale, ancora una volta per *modus ponens*. [Come si comprenderà meglio in seguito, non solo la non contraddittorietà di H implica "informalmente" che l'asserto G è indimostrabile in H, ma, qualora formalizzata, e cioè nella veste della proposizione Nctr(H), essa implica anche, e "formalmente", proprio la proposizione di Gödel G, che asserisce peraltro la propria indimostrabilità in H!] In effetti, poiché anche G$\rightarrow$Nctr(H) risulta H-dimostrabile, ossia è tale $\neg$Nctr(H)$\rightarrow\neg$G, e si sa, in virtù del teorema di incompletezza, che pure $\neg$G, al pari di G, è H-indimostrabile, si ottiene il seguente **corollario** del teorema in discorso (ma meglio sarebbe dire: **porisma**, dal momento che si tratta di una conseguenza della dimostrazione del teorema, e non del suo stretto enunciato): **Nctr(H) è un asserto indecidibile di H** (alcuni fanno riferimento a tale conclusione come al II Teorema di incompletezza di Gödel). [Abbiamo spezzato in due parti il "lemma" dianzi esplicitato, "Nctr(H)$\leftrightarrow$G è H-dimostrabile", allo scopo di chiarire il più possibile lo stato della conoscenza della questione nel 1931, e di apprezzare il ruolo di quella <<additional assumption>> (come viene chiamata nel citato *Handbook of Mathematical Logic*, p. 828) relativa all'ω-coerenza di H. Il teorema di incompletezza si presentava infatti esso stesso spezzato in due affermazioni: la prima relativa alla H-indimostrabilità dell'asserto G, la seconda relativa alla H-indimostrabilità dell'asserto $\neg$G, per la quale si richiedeva appunto la ω-coerenza di H. Conformemente, il "II teorena di incompletezza" poteva ancora considerarsi spezzato in due parti. La prima, asserente la H-indimostrabilità di Nctr(H), conseguenza di Nctr(H)$\rightarrow$G, valida sotto l'ipotesi di semplice coerenza di H (in parole: "indimostrabilità della coerenza dell'aritmetica"); la seconda, asserente la H-indimostrabilità di $\neg$Nctr(H), conseguenza di G$\rightarrow$Nctr(H), ovvero di $\neg$Nctr(H)$\rightarrow\neg$G, per la quale era invece necessaria la ω-coerenza di H (in parole: "indecidibilità della coerenza dell'aritmetica"). E qui ci sarebbe luogo per un'osservazione più delicata, a prevenire la troppo facile conclusione che $\neg$Nctr(H) è certamente H-indimostrabile, come ovvia conseguenza della coerenza di H: come potrebbe invero essere sotto tale ipotesi H-dimostrabile $\neg$Nctr(H), ovvero la "incoerenza" di H? La questione si comprenderà forse un po' meglio nel seguito, quando avremo avuto modo di precisare cosa significhi l'ω-coerenza, e di sottolineare che comunque, nell'attuale contesto, modelli coerenti del sistema H' ottenuto da H con l'aggiunta di $\neg$Nctr(H) esistono certamente, e che quindi in ciascuno di essi $\neg$Nctr(H) è H'-dimostrabile, nonostante la H'-coerenza (però, un siffatto H' certamente non potrebbe essere ω-coerente). Interessante è forse aggiungere che l'autore parla di una <<surprising consequence>>, e di una dimostrazione che sarà solo <<briefly outlined>> - citiamo ovviamente dalla traduzione inglese di Gödel 1931 - il che giustifica la precisazione "I" (primo) nel titolo dell'articolo. Fatto sta che, a causa forse dell'immediata e probabilmente inaspettata accettazione delle conclusioni in esso presentate (<<una delle scoperte più profonde della storia della logica e della matematica fu assimilata con prontezza e quasi senza obiezioni dai contemporanei di Gödel>>, dall'utilissimo "L'accoglienza dei teoremi di incompletezza di Gödel", di John W. Dawson Jr., in *Il teorema di Gödel: una messa a fuoco*, a cura di Stuart G. Shanker 1988, trad. it. 1991, di cui ci gioveremo qui proficuamente anche in altri punti), un secondo articolo, a precisar meglio la questione, non vide mai la luce. La circostanza pone comunque qualche curiosità di ordine storico relativamente alla pronta interpretazione dei risultati di Gödel da parte di una ben individuabile parte della matematica internazionale quali definitivamente risolutivi di alcuni dei problemi filosofico-fondazionali di fine '800-inizio '900 (senza tenere conto inoltre del fatto dianzi illustrato che nel 1931 talune asserzioni potevano essere stabilite soltanto introducendo nel gioco la più forte ipotesi di ω-coerenza).] Con ciò si risponderebbe in modo negativo alla richiesta di dimostrazione della coerenza dell'aritmetica contenuta nel *secondo problema* presentato da David Hilbert nel corso della famosa lezione tenuta durante il II Congresso internazionale dei matematici svoltosi a Parigi nel 1900: [Il primo di tali congressi fu organizzato a Zurigo nel 1897, per iniziativa di Klein e di Cantor; dall'XI del 1950, il primo dopo la guerra, che si svolse a Cambridge, Massachusetts, essi si tengono regolarmente con cadenza quadriennale, e vi si assegna - a partire dal X di Oslo del 1936, e a ricercatori che non abbiano superato i 40 anni d'età - la cosiddetta *medaglia Fields*, un riconoscimento analogo al premio Nobel, che per la matematica non è previsto.]

<<2. <u>The Compatibility of the Arithmetical Axioms</u>. To prove that they are not contradictory, that is, that a finite number of logical steps based upon them can never lead to contradictory results>>.

[E' doveroso informare che le parole precedenti dovrebbero essere più precisamente riferite al sistema dei numeri reali, in effetti fondato a sua volta sull'aritmetica da Weierstrass, Cantor, Dedekind, *etc.*, intorno al 1872 (*aritmetizzazione dell'analisi*): <<In his various papers on the foundations of mathematics Hilbert means by "arithmetic axioms" at times axioms for the real number system, at times axioms for number theory>> (*From Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, p. 383).]

[Il primo dei 23 problemi (secondo la versione a stampa; di questi soltanto 10 furono in realtà presentati da Hilbert al pubblico di Parigi, tra i quali i primi due, mentre un altro relativo alla teoria della dimostrazione fu invece omesso nella stesura finale, pur essendo stato discusso verbalmente) era invece dedicato alla cosiddetta *ipotesi del continuo*: <<1. <u>Cantor's Problem of the Cardinal Number of the Continuum</u>. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving. This is the theorem: Every system of infinitely many real numbers, *i.e.*, every [infinite] assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,... or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line [...]>> (si dice invece *ipotesi generalizzata del continuo* quella secondo la quale non esisterebbe alcun numero cardinale strettamente compreso tra un qualsiasi numero cardinale infinito $\aleph$ e $2^{\aleph}$, la cardinalità del relativo insieme delle parti). E' doveroso informare che lo stesso Gödel lavorò a lungo su tale questione, pervenendo, in tre articoli pubblicati tra il 1937 e il 1940 ("The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis", "Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis", "The consistency of the continuum hypothesis"), a un risultato di *compatibilità* dell'ipotesi del continuo con gli altri assiomi della teoria degli insiemi (per esempio quelli costituenti il cosiddetto sistema di Zermelo-Fränkel-Skolem, comprensivo dell'assioma della scelta), mentre quella che appare oggi una soluzione definitiva del problema, in termini di un risultato di *indipendenza*, venne fornita soltanto nel 1963 da Paul Joseph Cohen (1934, dopo il suo celebre teorema divenne professore a Stanford, ed ottenne la medaglia Fields nel 1966, durante i lavori del XV Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Mosca), ancora in tre articoli: "A minimal model for set theory", "The indipendence of the continuum hypothesis I, II".]

Una dimostrazione della coerenza dell'aritmetica, che usa però il *principio di induzione transfinita*, e va quindi al di là dei limiti "finitisti" del "programma di Hilbert", rispettati strettamente dalla formalizzazione gödeliana, venne peraltro ottenuta da Gerhard Gentzen nel 1936. [Secondo Hermann Weyl (*loc. cit.*, pp. 270-271): <<La geniale dimostrazione di G. Gentzen della coerenza dell'aritmetica (1936) non è finitistica nel senso di Hilbert; il prezzo pagato è un livello di evidenza sostanzialmente più basso, ed egli è costretto ad accettare come evidente un tipo di ragionamento induttivo che penetra nei "numeri ordinali di II specie" di Cantor. Così la linea di confine di ciò che è intuitivamente degno di fede è ancora una volta divenuta vaga>> (rammentiamo che i numeri ordinali di II specie sono quelli corrispondenti al cardinale $\aleph_0$, cioè alla totalità continua delle classi di isomorfismo dei buoni ordinamenti di *N*; la loro presenza in una dimostrazione di non-contraddittorietà dell'aritmetica non appare quindi a nostro parere del tutto incongrua, anzi).] Della ricerca di siffatte dimostrazioni si occupò successivamente anche lo stesso Gödel, nonostante appunto il suo (relativo) teorema di indimostrabilità.

[Si può osservare che la precedente proposizione Nctr(H) non è univocamente determinata dal contesto, potendosene evidentemente immaginare infinite altre delle quali sia lecito dire similmente che "esprimono" la coerenza di H. E' pertanto interessante sottolineare che, in virtù del lemma che abbiamo visto essere a monte del "II teorema di incompletezza", rimane stabilita la H-dimostrabilità di Nctr(H)$\leftrightarrow$G, talché si può affermare che *ciascuna* asserzione Nctr*(H), la quale esprima al pari della precedente Nctr(H) la coerenza di H, risulta "equivalente" a G (nel senso che l'asserto Nctr*(H)$\leftrightarrow$G è H-dimostrabile). In particolare, tali asserzioni sono tutte (indecidibili ed) equivalenti tra di loro, sicché ha senso parlare *della* asserzione che esprime la coerenza di H, con l'articolo determinativo singolare. Riprendiamo tale ragionamento da *Handbook of Mathematical Logic*, p. 829, anche se lì viene dato piuttosto risalto alla conseguente analoga "unicità" di G: <<one may correctly speak of *the* sentence that asserts its own unprovability>>. Abbiamo preferito così avendo in mente una nota in Corrado Mangione, "La logica nel ventesimo secolo", *Storia del Pensiero Filosofico e Scientifico*, a cura di Ludovico Geymonat, vol. VIII, p. 318, nella quale si riferisce una notizia che non siamo in grado di comprendere appieno, alla luce di quanto appena detto: <<La situazione messa in luce da Feferman ("Arithmetization of metamathematics in a general setting", 1960-61) è *grosso modo* la seguente: siccome in generale esistono *più* formule di una teoria formale sufficientemente potente che possono esprimere formalmente *uno stesso concetto* o proprietà metamatematica, egli mostra come alcuni risultati - e in particolare proprio il secondo teorema di Gödel - possono dipendere per quanto riguarda la loro validità proprio dalla scelta effettuata, ossia dalla formula che si è assunta per esprimere un dato concetto, in questo caso la noncontraddittorietà. Egli definisce quindi in modo convenzionale una scelta "canonica" seguendo la quale risultati di questo tipo vengono conservati mentre costruisce addirittura un controesempio che fa vedere come il secondo teorema di Gödel non valga nel caso di una scelta non "canonica". La questione, di evidente interesse, è attualmente oggetto di studio>>. La questione è davvero di evidente interesse, e saremmo lieti di poterne riferire di più, se ne fossimo in grado: la conclusione di Feferman sta forse a significare che esistono altre "forme" di Nctr(H) di cui non si riesce a dimostrare la non dimostrabilità, oppure va intesa come una dimostrazione di coerenza del tipo di quella di Gentzen? Oppure, peggio, che l'argomentazione di cui in esordio di nota è ancora più "informale" di quanto supponevamo, e che per la sua validità bisogna tenere conto di specifici particolari sulla forma di Nctr(H)? Il dubbio che potrebbe assalire a questo punto è che una siffatta argomentazione di equivalenza possa ripetersi per *tutti* gli asserti indecidibili di H (tenuto conto ovviamente delle *due* proposizioni indecidibili, Nctr(H) e ¬Nctr(H), non equivalenti nel senso indicato se H è coerente), ed ecco che non solo sembrerebbe davvero di essere di fronte (almeno in parte) a una gigantesca e poco istruttiva "tautologia", ma pure di dover riconoscere che, se una certa proposizione indecidibile appare poco "significativa", tale caratteristica sarebbe di necessità condivisa da ciascuna delle altre. Apparirebbe questa una circostanza capace di diminuire il valore dell'osservazione precedente, sulla rilevanza della costruzione di proposizioni indecidibili più "interessanti" (apparentemente) della G. Così in effetti non è, ma il rilievo dimostra come, in assenza di tale precisazione (e di diverse altre di cui avremo modo di discutere), ci si accontenti troppo presto e facilmente delle usuali presentazioni delle conclusioni di Gödel (avere compreso un teorema in matematica, o una teoria in fisica, significa essere in grado di individuarne almeno, e di saperne trarre, le più immediate "conseguenze").]

[E qui v'ha luogo per un istruttivo complemento alla nota precedente, sul perché lo scrivente non è in grado di fornire maggiori ragguagli sul punto in discussione. In effetti egli non ha ricevuto una formazione "accademica" in logica matematica, e conosce unicamente ciò che è reperibile (senza troppe difficoltà pratiche) in articoli, testi, *etc.*. Ma ciò non basta, in quanto: <<Mathematics today is essentially an oral culture: to keep abreast of it one must attend conferences and workshops or, better yet, be associated with a leading research center where the latest developments from near and afar are constantly being discussed>> (secondo un'azzeccatissima descrizione di David E. Rowe contenuta in un articolo istruttivo per numerosi altri aspetti, "'Jewish Mathematics' at Göttingen in the Era of Felix Klein", *Isis*, 77, 1986). Insomma, il presente articolo è quanto di meglio sia riuscito a fare un *outsider* autodidatta in certe questioni, che ha però ritenuto doveroso uscire dai poco convincenti schemi propagandistici ed auto-celebrativi della corrente *vulgata*.]

- - - - -

- Kurt Gödel, "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", 1930.
- Kurt Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I", 1931.
- Kurt Gödel, "On undecidable propositions of formal mathematical systems", 1934.
- Alonzo Church, "An unsolvable problem of elementary number theory", 1936 (in questo lavoro viene formulata la cosiddetta *tesi di Church*, secondo cui l'idea "intuitiva" di calcolabilità, o computabilità, e quindi di decidibilità "automatica" (meccanizzata), rimane effettivamente precisata mediante quella di *ricorsività*, una nozione a sua volta collegata al concetto di *macchina di Turing*).
- Alonzo Church, "A note on the Enscheidungsproblem", 1936.
- Gerhard Gentzen, "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", 1936.
- J. Barkley Rosser, "Extensions of some theorems of Gödel and Church", 1936.
- Alan M. Turing, "On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem", 1937.
- Yuri Matiyasievitch, 1970. English translation: "Enumerable sets are Diophantine". Hungarian translation: "Solution of tenth problem of Hilbert".

- - - - -

Parte II

Cenno ("informale") alla dimostrazione originale di Gödel

Gödel fa prima di tutto ricorso alla cosiddetta *gödelizzazione* delle parole (stringhe) costruite sull'insieme (finito o numerabile) dei simboli del linguaggio L, in modo che tutto il discorso verta esclusivamente su numeri (naturali). [Come vedremo in qualche caso particolare, la gödelizzazione permetterà di formalizzare, e "codificare" infine come semplici numeri, anche alcune proprietà metateoriche (per esempio essere un “segno primitivo”, una “formula ben formata”, un “assioma”, *etc.*), che vengono tradotte in proprietà aritmetiche. A tali proprietà poi l'autore, per farsi capire meglio, assegna lo stesso nome di quelle metateoriche corrispondenti, ma con carattere diverso: corsivo nell’originale, maiuscolo in certe traduzioni.] Possiamo quindi parlare del *numero di Gödel* di un enunciato di H, o di un predicato di H, e finanche di una dimostrazione in H (un particolare elemento di W(W(L))). Si introduce quindi il predicato diadico D(x,x'), che è la "controparte formale" (di questo delicato punto tratteremo meglio in seguito) della relazione numerica binaria ricorsiva D(m,n):

- D(m,n) significa che la dimostrazione avente numero di Gödel m dimostra l'enunciato avente numero di Gödel n.

(Per contro, la relazione opposta $\overline{\mathrm{D}}$(m,n) - un segno $^{-}$ starà per negazione del simbolo a cui viene apposto - significa che o m o n non sono numeri di Gödel del tipo che ci interessa, o che l'enunciato avente numero di Gödel n non è dimostrato dalla dimostrazione avente numero di Gödel m.)

Il predicato diadico D(x,x') si estende poi a un predicato triadico R(x,x',x") che è ancora la controparte formale di una relazione numerica ternaria ricorsiva R(m,n,p):

- R(m,n,p) significa che la dimostrazione avente numero di Gödel m dimostra l'enunciato costruito a partire dal predicato monadico F(x) avente numero di Gödel p quando in esso si sostituisca x con n, vale a dire, la dimostrazione in oggetto dimostra l'enunciato: $\forall x(x=\ulcorner n \urcorner \wedge F(x))$ (è questo uno dei modi di esprimere formalmente il concetto di "sostituzione").

A questo punto si costruisce un nuovo predicato diadico, $\neg\exists x''(R(x'',x,x'))$, dal quale si ottiene un predicato monadico per diagonalizzazione, $K(x) \equiv \neg\exists x'(R(x',x,x))$. K(x) avrà un proprio numero di Gödel, diciamolo g, con cui possiamo infine formare l'enunciato:

$$G \equiv \forall x(x=\ulcorner g \urcorner \wedge K(x)) \equiv \forall x(x=\ulcorner g \urcorner \wedge \neg\exists x'(R(x',x,x)) \leftrightarrow \forall x(x=\ulcorner g \urcorner \wedge \forall x'(\overline{R}\,(x',x,x)).$$

Dovrebbe essere chiaro allora in che senso si dice che l'enunciato formale G "asserisce la propria indimostrabilità in H", e si faccia riferimento nel presente contesto al "paradosso del mentitore" (citiamo dallo stesso Gödel 1931, in traduzione inglese: <<The analogy of this argument with the Richard antinomy leaps to the eye. It is closely related to the "liar" too [..]>>). E' chiaro anche allora che H $\nvdash$ G, mentre sempre in modo così "informale" (tra tanto "formalismo" la parola ci sta bene; e poi ci sono in giro tante superficiali divulgazioni del teorema di Gödel - secondo Rudy Rucker: <<The proof of Gödel's Incompleteness Theorem is so simple, and so sneaky, that it is almost embarassing to relate>>, vedi appendice A - che la presente esposizione dà almeno un'idea non troppo deformata di ciò di cui in effetti si tratta) ci si può aspettare che valga pure la H $\nvdash$ $\neg$G. Questa risulta immediatamente stabilita se si introduce l'ipotesi di ω-coerenza. Infatti l'argomentazione di Gödel costruisce un predicato monadico L(x) tale che l'enunciato $\forall$x(L(x)) non è dimostrabile in H, pur essendo L(n) (ottenuto da L(x) per sostituzione di x con n: $L(n) \equiv \forall x(x = \ulcorner n \urcorner \wedge L(x)))$ dimostrabile per ogni numero naturale n, ossia: H $\vdash$ L(n). Date le notazioni precedenti, il predicato in questione può essere sinteticamente indicato come $\overline{R}$(x,g,g). Orbene, l'ipotesi di ω-coerenza può essere formulata asserendo proprio che se per un qualsiasi predicato monadico (ben formato) F(x) risulta H $\vdash$ F(n), per ogni numero naturale n, allora in H *non* si può dimostrare $\exists x(\overline{F}(x))$. Quindi siamo sicuri, nelle condizioni ammesse, che H $\nvdash$ $\exists x(\overline{L}(x))$, ma questo enunciato è equivalente a $\neg\forall$x(L(x)), che è proprio la desiderata $\neg$G. L'ipotesi di ω-coerenza (che è per esempio di certo soddisfatta quando H ammetta tra i suoi modelli esattamente l'insieme dei numeri naturali *N*, ossia il cosiddetto *modello standard* dell'aritmetica) appare in effetti piuttosto artificiale, e soprattutto *ad hoc*, una constatazione che permette di apprezzare meglio la sua eliminazione da parte di Rosser.

Cenno alla dimostrazione di Boolos

La dimostrazione di Boolos (su cui ci dilungheremo un poco, anche perché riteniamo che così si comprederanno meglio alcuni particolari della dimostrazione precedente, e del discorso generale relativo alla logica del I ordine), si ispira dichiaratamente al paradosso di Berry (che non è altro che una variante del paradosso di Cantor-Richard; di entrambi ci occuperemo nella parte III), e concerne quella che si comprenderà essere una "versione debole" del teorema di Gödel. Boolos considera da un alfabeto *finito*, per esempio:

i) i segni 0, S (il cui "significato" abbiamo già spiegato);
ii) i segni x, ' (x è una "variabile numerica", ' un segno che permette di costruire tramite x un'infinità numerabile di altre variabili numeriche, x', x", *etc.*);
iii) i segni +, $\times$, =, $\forall$, $\exists$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, (,) (simboli "tradizionali", che non c'è bisogno di spiegare);

e volendo altri simboli aritmetici (ma non insiemistici, per esempio non il simbolo di

Peano $\in$), quali <, ≤, *etc.*, che possiamo introdurre anche quando sarebbe possibile esprimerli come semplici combinazioni di segni dell'alfabeto appena indicato (che prescinde esso stesso, peraltro opportunamente, da questioni di "minimalità", o di "indipendenza"). Sorvoliamo a proposito delle "naturali" regole del linguaggio, degli assiomi, [Sostanzialmente i cosiddetti *assiomi di Dedekind-Peano*. Sarebbe interessante però prendere almeno atto del modo con cui si esprime (mediante uno "schema di assiomi") l'induzione completa, in presenza di variabili esclusivamente numeriche: si può chiedere che per ogni predicato monadico F(x), e per ogni numero naturale n, l'asserto $\forall x((F(x)\rightarrow F(Sx))\rightarrow(F(0)\rightarrow F(\ulcorner n\urcorner)))$ sia un assioma.] delle regole di inferenza, ma diciamo qualcosa invece sulla gödelizzazione. Se per esempio si associa al segno 0 il numero naturale 1, al segno S il numero naturale 2, *etc.*, nell'ordine (casuale) con cui i diversi segni sono stati elencati, ecco che il numero di Gödel dell'enunciato ("falso") 0=S0 è $2^1*3^7*5^2*7^1$ (indichiamo con $*$ l'ordinaria operazione di prodotto tra numeri naturali, tanto per rimarcare meglio, ma solo in questo caso, la differenza con il "puro segno" ×), mentre il numero di Gödel dell'enunciato (pur esso falso!) $\exists x(0=Sx)$ è invece $2^9*3^3*5^{15}*7^1*11^7*13^2*17^3*19^{16}$. Numeri invero "grandini", ma pur sempre numeri naturali come tutti gli altri! [Si è considerata ovviamente, allo scopo desiderato, la successione ordinata dei numeri primi: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$,... , e ad ogni k-pla ordinata $(n_1,...,n_k)$ di numeri naturali, corrispondenti ai numeri associati ai segni che compongono una stringa di lunghezza k, si è associato il numero naturale $n = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}$.] E' chiaro che, così operando, Boolos intende costruire un sistema formale H che ha tra i suoi modelli esattamente *N*, con le strutture algebriche additiva e moltiplicativa, e con la struttura d'ordine naturale (peraltro univocamente determinata dalla struttura algebrica additiva, tramite la: $x \leq y \Leftrightarrow \exists$ z tale che $y = x + z$). Ne consegue in particolare che la proprietà di ω-coerenza del sistema H è assicurata *a priori*. Si prendono successivamente in considerazione, per ogni predicato monadico F(x) ed ogni numero naturale m, tutti gli enunciati dimostrabili in H del tipo $\forall x(F(x)\leftrightarrow x=\ulcorner m\urcorner)$, dove $\ulcorner m\urcorner$ è un'abbreviazione per indicare il numero formale SS...S0 corrispondente ad m (come dire che $\ulcorner 1\urcorner \equiv S0$, $\ulcorner 2\urcorner \equiv SS0$, *etc.*). Si dice quindi che il predicato monadico F(x) "nomina" (in H) il numero naturale m se l'enunciato $\forall x(F(x)\leftrightarrow x=\ulcorner m\urcorner)$ è dimostrabile (in H). E' evidente allora che un arbitrario numero naturale m potrà essere nominato soltanto da un numero finito di predicati monadici (eventualmente zero) aventi fissata *lunghezza* (numero dei simboli che costituiscono il predicato), sicché si potrà introdurre il predicato diadico A(x,x') che è (come già annunciato nel paragrafo precedente, su questo punto importante avremo occasione di ritornare) la controparte formale della relazione numerica ricorsiva:

- A(m,n) significa che il numero naturale m viene nominato da qualche predicato di lunghezza n.

Ormai tutta la strada è in discesa. Da A(x,x') si può costruire il predicato diadico $B(x,x') \equiv \exists x''(x''\leq x'\wedge A(x,x''))$, la cui interpretazione è manifesta (B(m,n) vale se il numero m si può nominare con predicati di lunghezza non superiore a n), e da questo un nuovo predicato diadico $C(x,x') \equiv \neg B(x,x')\wedge\forall x''(x''<x\rightarrow B(x'',x'))$ (C(m,n)

significa che il numero m è il minimo non nominabile in H con un predicato monadico di lunghezza non superiore a n). Indichiamo adesso con k la lunghezza del predicato diadico C(x,x'), e andiamo a prendere in considerazione il predicato monadico F(x), definito come $\forall x'(x'=\ulcorner 10 \urcorner \times \ulcorner k \urcorner \wedge C(x,x'))$. E' chiaro che, detto q il minimo numero naturale non nominabile in H con un predicato monadico di lunghezza non superiore a 10k, l'enunciato $\forall x(F(x) \leftrightarrow x=\ulcorner q \urcorner)$ non potrà essere dimostrabile nel sistema H, perché altrimenti q verrebbe "nominato" da un predicato monadico di lunghezza 7+11+1+k+1+1+k+1 = 22+2k, che è minore di 10k (essendo certamente $k \geq 3$), contrariamente alla definizione di q. Del resto, neppure $\neg(\forall x(F(x) \leftrightarrow x=\ulcorner q \urcorner))$ potrà essere dimostrabile nel sistema H, proprio perché $\forall x(F(x) \leftrightarrow x=\ulcorner q \urcorner)$ è "vero" in *N*, che si suppone costituire un modello di H, sicché, se potessimo dimostrare in H, in modo quindi puramente formale, la negazione dell'enunciato in discorso, ecco allora che tale enunciato dovrebbe risultare necessariamente "falso", allorquando interpretato in *N*. Tutto ciò, naturalmente, nell'ipotesi di coerenza di H, ossia di non-contraddittorietà della struttura dei numeri naturali!

[La dimostrazione è stata ripresa dal libro di Reuben Hersh, *Cos'è davvero la matematica*, che la riporta dalla p. 467 alla p. 474. A proposito di tale libro, non possiamo esimerci dall'invitare i lettori a prenderlo in mano, a leggerne semmai solo le pagine d'esordio, dedicate a un colloquio dell'autore con la figlia ("Dialogo con Laura"), e a chiedersi successivamente se non appaia più dotata di "buon senso" la ragazzina invece del padre, il quale cerca di confondere la malcapitata con argomenti del tipo: << - Padre: quanto fa uno strafantastiliardo più uno strafantastiliardo? - Figlia: Fa due strafantastiliardi! E' facilissimo! - Padre: E come fai a saperlo? [...] tu uno strafantastiliardo non l'hai mai visto. E nemmeno qualcosa che gli assomigli. [...] Se prendo uno strafantastiliardo e ci aggiungo 1, quanto fa? - Figlia: Uno strafantastiliardo e uno, proprio come mille e uno o un milione e uno. - Padre: Non è che ci potrebbe essere qualche numero fra uno strafantastiliardo e uno strafantastiliardo e uno?>>, e via di questo passo.]]

Qualche perplessità (al volo)

La dimostrazione di Boolos (anche se non appare capace di comprendere come sua pura conseguenza logica il "II teorema di incompletezza") ha secondo noi il merito di far apprezzare meglio del più complicato ragionamento di Gödel (che abbiamo presentato seguendo la traccia fornitane da Hermann Weyl, in appendice a *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*) l'origine vera dell'incompletezza. Vi si ottengono enunciati indecidibili del tipo $\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \leftrightarrow F(x))$ (per qualche numero naturale m e qualche predicato monadico F(x)), sicché, pensando all'enorme varietà e soprattutto complicazione dei possibili enunciati aritmetici, e spezzando l'affermazione in due, si può in effetti convenire sulla "difficoltà" di decidere *in maniera esclusivamente algoritmica*, e *senza "uscire" da H*, l'eventuale validità di un enunciato del tipo $\forall x(F(x) \rightarrow x=\ulcorner m \urcorner)$. La dimostrazione di Gödel mostra però come l'incompletezza possa sempre riferirsi ad enunciati ancora più semplici, del tipo $\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \rightarrow F(x))$ ("equivalenti" a quelli esibiti in precedenza, del tipo $\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \wedge F(x)))$, ed accettare la possibilità che uno di tali asserti sia indecidibile appare assai meno facile rispetto al caso di un enunciato di tipo "inverso". Infatti, si potrebbe addirittura pensare che se un predicato monadico $F(x)$ risulta ben formato in base alle regole di un sistema formale del tipo in considerazione, allora dovrebbe necessariamente valere il seguente naturale "criterio di adeguatezza":

- Per ogni numero naturale n, l'asserto $\forall x(x=\ulcorner n \urcorner \rightarrow F(x))$ deve essere sempre decidibile.

Qualora così non avvenga, come sembra essere attualmente il caso, ecco che si potrebbe presumere che sia semplicemente la strutturazione del complesso di definizioni ad essere criticabile, in quanto appunto "non adeguata" alla fenomenologia che viceversa pretende di descrivere. La precedente "obiezione" (sulla quale ritorneremo in maggiore dettaglio in: "Sulla forma delle proposizioni indecidibili nei sistemi formali di Gödel, ed alcune osservazioni sull'intuizionismo", nella nostra pagina web dedicata alla storia e ai fondamenti della matematica) ci sembra in sintonia con le seguenti parole dello studioso "indipendente" indiano Bhupinder Singh Anand (dal suo ricchissimo sito: http://alixcomsi.com/index01.htm):

<<*I argue that, although Gödel's proposition **GUS*** [Gödel Undecidable Statement] *is a well-formed formula in **PP*** [Peano Postulates]*, it is an ill-defined proposition*. [...] I argue, however, that a major feature of Gödel's formal system is that the chosen *Rules of Inference* are non-constructive, in the sense that they also assign, implicitly and sweepingly, non-verifiable "formal (*logical*) truth" values under interpretation in some models to various expressions. Thus the system, in a sense, postulates "formally (*logically*) true" expressions under some interpretation that cannot be correlated, even in principle, to any "factual (*intuitive*) truths" of a human "perception". [...] One of the consequences of using constructive *Rules of Inference* is that the reasoning by which Gödel concludes that the formal "Gödel" proposition, which translates loosely as "The 'Gödel' proposition is not 'provable'", is intuitively true collapses. In this paper, I define a formalisation of *Intuitive Arithmetic* in which Gödel's argument leads to a contradiction. In effect, we are faced with the expected reflection of the "Liar" sentence, namely "The 'Liar' sentence is a lie", in constructive formal theories. However, I argue that this is not necessarily the drawback that it appears to be at first sight. In fact such contradictions both encourage and discipline us in our use of rich and creative languages. They force us to focus on devising rules by which we can recognise well-formed formulas of the theory that need to be treated as ill-defined propositions. [...] I argue that, in a sense, what Gödel's reasoning actually accomplishes is best viewed as an "illusion", where a "constructive" argument successfully masks a "non-constructive" premise>>.

Proseguendo sul medesimo tema, discutiamo quale possa essere analogamente il significato da assegnare alla pretesa "indecidibilità" di proposizioni diofantee del tipo $\exists \underline{x}(P(\underline{x})=0)$. La situazione appare simile (ma, come presto vedremo, non del tutto) a quella discussa in precedenza: l'enunciato $\exists \underline{x}(P(\underline{x})=0)$ non dovrebbe mai, *a priori*, potersi considerare indecidibile, poiché affermare che si è "dimostrato" che esso è indecidibile significherebbe appunto potersi escludere che una soluzione dell'equazione $P(\underline{x})=0$ venga determinata da qualcuno semplicemente "per caso", e quindi tale dimostrazione equivarrebbe a dire che il problema diofanteo in oggetto è stato "dimostrabilmente deciso" in senso opposto, ossia che: $\forall \underline{x}(P(\underline{x})\neq 0)$. Ci sembra che tale obiezione sia fatta propria anche dal rinomato scienziato inglese John David

Barrow: <<è possibile costruire interessanti esempi di carattere euristico che mostrino come siamo in grado di riconoscere la verità o la falsità di enunciati indecidibili...Supponiamo per esempio che si dimostri che la congettura di Goldbach sia una proposizione indecidibile...allora non potremmo mai individuarne un controesempio altrimenti si sarebbe dimostrato che è falsa...ma se non può esistere nessun controesempio la congettura deve essere vera...>>, ma è nota però la sottigliezza con cui si replica a una tale critica. Come abbiamo già visto in un caso simile, l'indimostrabilità formale in H dell'enunciato $\forall\underline{x}(P(\underline{x})\neq 0)$ non impedisce che, di fatto, $P(\underline{x})$ possa risultare diversa da zero per ogni valore di $\underline{x}$ in N^k, se $\underline{x}$ rappresenta una k-pla ordinata. Ciò riconduce direttamente ai limiti della logica del I ordine (la "logica" nel presente contesto utilizzata - vedi appendice C) al cui interno tutti i precedenti ragionamenti sono formulati, e al famoso *teorema di Löwenheim-Skolem* (Leopold Löwenheim, 1878-1957, fu costretto a ritirarsi dall'insegnamento nel 1934 per motivi razziali; Thoralf Albert Skolem, 1887-1963, norvegese, fu professore ad Oslo, studiò per un breve periodo durante la I guerra mondiale a Göttingen; il teorema in parola fu oggetto di varie sue ricerche effettuate tra il 1920 e il 1929, di cui la prima, che estendeva un precedente risultato di Löwenheim, "Über Möglichkeiten im Relativkalkül", 1915, concepito dall'autore come un "paradosso", fu pubblicata con il titolo "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischen Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen", 1920). Infatti tale teorema stabilisce la assoluta *non categoricità* di qualsiasi sistema formale H del tipo in esame: Se un sistema formale coerente H, con un alfabeto L al più numerabile, ammette qualche modello infinito, allora esso ammette modelli di qualsiasi cardinalità infinita. [Di conseguenza, bisogna ammettere l'esistenza di un modello dell'aritmetica che ha la cardinalità del continuo, e di un modello dei numeri reali che ha la cardinalità del numerabile!] Come dire che i paradossi interpretativi ai quali stiamo accennando sembrano fondarsi essenzialmente sul *conflitto* tra una naturale aspettativa di categoricità, collegata al termine "aritmetica", da parte dell'ascoltatore "ingenuo", e l'effettiva impossibilità di categoricità del sistema H, che l'aritmetica peraltro pretende a parole di descrivere. E' chiaro che certe pretese filosofiche diminuiscono nettamente di valore, se non si puo' formalizzare categoricamente al I ordine l'insieme dei numeri naturali *N*: un'impossibilità che non può non essere avvertita da un "kantiano" più come un segno dei limiti (arbitrariamente) imposti al linguaggio, che non dei limiti effettivi dell'"intuizione ordinaria". [Assai istruttivi al riguardo sono i titoli di altri due lavori di Skolem: "Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems", 1933; "Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliessich Zahlenvariablen", 1934, le cui conclusioni sono quelle che supponiamo facciano poi dire ad Hermann Weyl (*loc. cit.*, p. 270): <<ciò che sorprende è che un costrutto creato dalla mente stessa, la successione dei numeri interi, l'oggetto più semplice e diafano per la mente costruttiva, assuma un simile aspetto di oscurità e deficienza quando lo si consideri dal punto di vista assiomatico>>. Ora, ci pare una stridente contraddizione "filosofica" l'affermazione di una non-caratterizzabilità dell'insieme *N* dei numeri naturali, secondo una "normativa" che si sostiene d'altronde sufficiente a esprimere la più larga parte della matematica ordinaria, quando poi proprio sulla caratterizzabilità dell'insieme *N* si fondano tutte le argomentazione metamatematiche di cui siamo a conoscenza - si pensi in particolare alla nozione di ω-coerenza. Questo rilievo ci sembra corrispondere a quello con cui <<Hilbert liquidò il

programma logicista senza batter ciglio>>, nel suo intervento al III congresso internazionale dei matematici svoltosi ad Heidelberg nel 1904: <<obiettò sostanzialmente che il lungo e complicato sviluppo della logica comportava già la presenza dei numeri interi, anche se non li nominava espressamente; per questa ragione il tentativo di costruire il concetto di numero sulla logica si riduceva a un ragionamento circolare>> (citazione da Morris Kline, *Matematica la perdita della certezza*, 1980; trad. it. 1985, pp. 268-269). In effetti, qui la questione è di tipo tecnico, e l'interpretazione riconduce ancora una volta all'uso di termini in contrasto con la loro accezione comune. Nella logica del I ordine viene ammesso soltanto l'uso di "Zahlenvariablen", e quindi non si può per esempio formulare il principio di induzione completa, nella forma "per ogni sottoinsieme X di *N etc.*", perché un trattamento dei sottoinsiemi X di *N*, che costituiscono tra l'altro una totalità non numerabile, non rientra nelle proprietà espressive del linguaggio. Insomma, l'impressione è al solito che, ammesso pure che taluni risultati siano corretti, essi dipendano in massima parte dalle regole consentite per il gioco, che possono essere fissate in modo tale da consentire le conclusioni *a priori* desiderate: *quando un illusionista tira fuori un coniglio dal cappello, si può essere sicuri che ce l'ha nascosto dentro prima*. Ci pare interessante citare al riguardo Alexander George, "Skolem and the Löwenheim-Skolem Theorem: A Case Study of The Philosophical Significance of Mathematical Results", 1985: <<The dream of a community of philosophers engaged in inquiry with shared standard of evidence and justification has long been with us. It has led some thinkers puzzled by our mathematical experience to look to mathematics for adjudication between competing views. I am skeptical on this approach and consider Skolem's philosophical uses of the Löwenheim-Skolem Theorem to exemplify it. I argue that these uses invariably beg the question at issue. I say "uses", because I claim further that Skolem shifted his position on the philosophical significance of the theorem as a result of a shift in his background beliefs. The nature of this shift and possible explanations for it are investigated. Ironically, Skolem's own case provides a historical example of the philosophical flexibility of his theorem>>. Come dire che ci sono non solo i risultati eventualmente "aggiustati" da tenere in conto, ma anche le loro "interpretazioni": noi riteniamo comunque che non si tratti di una caratteristica connaturata a limiti epistemologici umani, e che semplici rimedi al lamentato stato di cose possano consistere semplicemente in onestà intellettuale, e sincerità nella comunicazione, due caratteristiche che vengono sfavorite dalla forte attuale competizione tra scienziati, e da un (antico di qualche secolo) uso ideologico e politico della conoscenza ("scientifica" e non).]

[A proposito di relazioni tra categoricità e completezza, ferma restando la assoluta non categoricità di un sistema formale che ammette modelli infiniti, val la pena però di riportare l'enunciato del seguente teorema di Vaught (Robert Lawson Vaught, 1926-2002, fu allievo di Alfred Tarski, e professore a Berkeley, University of California; "Applications of Löwenheim-Skolem theorem to problems of completeness and decidability", 1954): Se H è un sistema formale coerente con un alfabeto finito o numerabile, privo di modelli finiti, e categorico per qualche numero cardinale infinito $\aleph$, nel senso che due modelli di H aventi cardinale $\aleph$ risultano necessariamente isomorfi, allora H è completo. Il teorema in oggetto (che alcuni chiamano *test di Los-Vaught* - Jerzy Los, 1920-1998, fu un esponente della già nominata scuola di logica polacca) è un'immediata conseguenza del teorema di Löwenheim-Skolem, e ci sembra opportuno riportarla perché il lettore possa acquistare maggiore familiarità con tale tipo di questioni. Se H non fosse completo, allora esisterebbe un asserto P indimostrabile in H assieme alla sua negazione $\neg$P, sicché il sistema formale H' desunto da H con l'aggiunta di P come assioma sarebbe coerente al pari di H, e la stessa cosa varrebbe per H", l'analogo sistema formale costruito a partire a partire da H con l'aggiunta di $\neg$P. H' ed H" avrebbero quindi entrambi un modello, diciamoli rispettivamente M' ed M", i quali, essendo in particolare dei modelli di H, non possono essere finiti, in virtù del'ipotesi ammessa. Per il teorema di L-S dianzi ricordato, possiamo allora supporre che M' ed M" abbiano cardinalità infinita arbitraria. In particolare, che abbiano entrambi addirittura la medesima cardinalità $\aleph$, il che contraddice l'ipotesi del teorema, in quanto per costruzione M' ed M" non possono essere isomorfi. E' forse interessante informare pure che, secondo un teorema di Michael D. Morley (1930, professore emerito di matematica alla Cornell University; "Categoricity in power", 1965), che risponde a una questione di Los, esistono soltanto **tre** tipi possibili di categoricità per un sistema formale H con un linguaggio al più numerabile, privo di modelli finiti, ed $\aleph$-categorico per qualche numero cardinale infinito $\aleph$. Una $\aleph_0$-categoricità associata a una non $\aleph$-categoricità per ogni cardinale infinito $\aleph$ (un esempio è dato dalla teoria di quegli spazi linearmente ordinati che abbiamo chiamato "continui di I specie numerabili" in "Appendice sulle definizioni matematiche di discreto e continuo", *Episteme* N. 8, 2004, consultabile in rete nel nostro sito, vedi l'URL riportato in fine di nota; il risultato cui si fa qui riferimento è lì espresso nel Corollario al II Teorema di classificazione, che è un noto teorema stabilito da Cantor); una $\aleph$-categoricità, dove $\aleph$ è un qualsiasi cardinale infinito diverso però da $\aleph_0$ (un esempio è dato dalla teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero); infine, una $\aleph$-categoricità per tutti i cardinali infiniti $\aleph$, compreso $\aleph_0$ (un esempio è dato dalla teoria degli spazi vettoriali a dimensione infinita su un campo finito). In altre parole, a parte una categoricità che potremmo definire "totale", valida cioè per ogni cardinale infinito, esistono quelle che potremmo definire una "categoricità numerabile" e una "categoricità non numerabile". Precisamente, il teorema di Morley stabilisce che, se H risulta $\aleph$-categorico per *qualche* cardinale $\aleph$ non numerabile, allora H risulta anche $\aleph$-categorico per *qualsiasi* cardinale $\aleph$ non numerabile. E' questo un altro curioso esempio in cui la dicotomia discreto-continuo appare rivestire un ruolo di primo piano, e secondo noi non ancora perfettamente compreso, nonostante i citati risultati di Gödel e di Cohen sull'ipotesi del continuo (utilizziamo qui il termine "discreto" semplicemente come sinonimo di numerabile; per una definizione più precisa si veda http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/ep8/ep8-zeno-app.htm). Si ringrazia vivamente il Prof. Giorgio Odifreddi per averci generosamente aiutato a precisare alcuni punti della presente nota.]

Non è il caso in questa sede di approfondire la convinzione, condivisa in passato anche da altri (primo tra i quali Zermelo), che l'origine di tutte le difficoltà comportate dal teorema di incompletezza [Che ci sembra aver prodotto tanti "danni" intellettuali almeno quanto la teoria della relatività di Einstein, seppur di esso sia lecito paradossalmente dirsi: <<what's most startling about Gödel's theorem, given its conceptual importance, is not how much it's changed mathematics, but how little. No theoretical physicist could start a career today without a thorough understanding of Einstein's and Heisenberg's contributions. But most pure mathematicians can easily go through life with only a vague acquaintance with Gödel's work>> - Jordan Ellenberg, http://slate.msn.com/id/2114561/.] possa essere interamente ricondotta allo *skolemismo*. Secondo Zermelo (la cui <<crociata contro lo "skolemismo" guagagnò pochi aderenti>>) si trattava della <<dottrina che *ogni* teoria matematica, perfino la teoria degli insiemi, è realizzabile in un modello numerabile>> (le citazioni sono ancora una volta da Dawson). Siamo in effetti di fronte a una sorta di pitagorismo di ritorno, secondo il quale "tutto" è numero (parole chiave associate: intero, numerabile, discreto), e non vi è alcuna possibilità per la matematica di trattare il continuo non numerabile, nella misura in cui essa viene concepita, quasi una sorta di enorme "biblioteca di Babele", soltanto sotto il piano del λογος, del discorso, a cui si sottrae peraltro l'unico ruolo che ad esso sarebbe invece autenticamente proprio, ovvero di comunicazione fra "coscienze". [A questo proposito si veda anche l'appendice E. Si dice che i matematici "comuni" siano durante la settimana lavorativa dei platonisti (chissà poi perché non dei kantiani, o dei cartesiani), e durante i fine settimana ci tengano invece ad apparire dei formalisti, indossando per l'occasione l'abito della festa, ma ci sembra piuttosto che, nell'attuale era del *computer*, nei loro templi si veneri principalmente una forma di stretto costruttivismo "astratto" di spiccato stampo intuizionista. Rammentiamo che l'*intuizionismo* (si veda anche l'appendice F) rappresentò una comprensibile reazione - di cui fu "caposcuola" il matematico olandese Luitzen Egbertus Jan Brouwer - alle tendenze diciamo in generale "formalistiche" della matematica del primo '900, ma fu a nostro parere una reazione eccessivamente radicale (Brouwer pubblica lavori dal titolo "Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?", 1920, dove pone in dubbio il fatto che ad ogni numero reale si possa associare una scrittura decimale, mentre nel 1923 critica l'uso indiscriminato del principio del terzo escluso, sostenendo che, dati due numeri reali distinti x ed y, non si possa stabilire in qualche caso se x < y oppure y < x, o ancora che non sia sempre impostabile l'alternativa secondo cui un certo insieme o è finito o è infinito - "Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie"), e soprattutto *non-kantiana*, nonostante il termine "intuizione" che viene comunemente utilizzato a designarla (nella misura in cui tale pur giustificata reazione è influenzata comunque da tendenze riduzionistiche aritmetizzanti, e quindi *anti-dualistiche*, che portano ad espellere dai fondamenti proprio ciò che riguarda l'intuizione spaziale, e quindi il continuo e la geometria; Brouwer appare così anch'egli una "vittima" della propaganda relativa alle *geometrie non euclidee*, un altro importante caposaldo *tabù* del pensiero matematico corrente che bisogna saper affrontare con spirito critico, e su cui saremo costretti a tornare in altro apposito studio). La *rivincita dell'intuizionismo*, nonostante tutte le dichiarazioni ed apparenze contrarie?! Sottolineiamo però che anche un'eventuale risposta affermativa a tale domanda non sarebbe poi del tutto corrispondente alla realtà dei fatti, dal momento che, come vedremo, nel concetto di sistema formale c'è meno costruttivismo di quanto possa a prima vista sembrare. Comunque sia, appare chiaro almeno che contradditori connubi ideologici del tipo appena descritto godano di grande prestigio e diffusione presso i meno esperti degli esperti.] Almeno nella parte finale dell'opinione appena espressa sembra riconoscersi anche il già menzionato Bhupinder Singh Anand, che ci piace pertanto citare ancora, a maggiore edificazione dei lettori, che si imbatteranno raramente in siffatte opinioni nella letteratura di maggiore diffusione dedicata all'argomento:

<<The view of Gödel's Theorems that I attempt to present is that they are essentially concerned with the effectiveness of our ability to "communicate" the abstractions that we intellectually "construct" on the basis of our "individualistic" sensory perceptions. They thus have to do with the efficiency and effectiveness of our language of communication [...] I hold that "factual (*intuitive*) truth" does not "exist" outside "consciousness". Thus there is no "factual (*intuitive*) truth" in the absence of conscious intuitive "perception", just as there is no "formal (*logical*) truth" in the absence of conscious intellectual "communication">>.

Il punto di vista che stiamo criticando ignora volutamente la sostanziale dicotomia **pensato-parlato** (parallela all'altra importantissima **reale-pensato**; si veda quanto ne viene detto in generale in http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/ep8/ep8-zeno.htm), alla quale alludeva già Aristotele nelle sue sacrosante e giammai sufficientemente lodate *Confutazioni sofistiche*: <<limitato è il numero dei nomi, come limitata è la quantità dei discorsi, mentre gli oggetti sono numericamente infiniti. E' dunque necessario che un medesimo discorso esprima parecchie cose e che un unico nome indichi più oggetti>>. [Si direbbe ai giorni nostri naturalmente che Aristotele non coglie nella sua riflessione la differenza tra numerabile e continuo, in quanto avrebbe dovuto dire che numerabile è il numero dei "nomi", mentre gli "oggetti" hanno la potenza del continuo. Comunque, almeno secondo noi, come confutazione del "nominalismo" (cogliamo così l'occasione per introdurre un nuovo "ismo"!), e dei sofisti (dei quali si dice nella *Metafisica*, IV, 1009 a, che la loro è <<una dottrina estremista che impedisce di definire qualcosa con il pensiero>>, e che da tale dottrina bisogna *liberarsi*), e nell'ottica di una *filosofia a misura d'uomo*, la riflessione aristotelica appare ancora oggi altamente apprezzabile.]

Non possiamo quindi non ribadire apertamente l'impressione di trovarci nel complesso di fronte a un "quadro" concettuale con cui si è preteso di "formalizzare" la fenomenologia matematica in un modo che potrebbe essere ritenuto in qualche senso "deficiente", soprattutto in ordine alla circostanza che i termini linguistici utilizzati non corrispondono affatto alla loro "accezione comune". [La riflessione ci sembra ricollegabile a un'altra che si trova in una nota a pie' di pagina del citato "La logica nel ventesimo secolo", p. 299: <<In effetti non poche discussioni erano sterili in quanto a termini linguistici uguali venivano dati spesso, dalle due parti, significati radicalmente diversi>>.] Insomma, si direbbe che da un'indagine matematica più che legittima, e anche moderatamente istruttiva sotto il profilo di questa disciplina, si vogliano inferire, mediante indebite speculazioni "metalogiche", degli insegnamenti filosofici, che si esige poi vengano tenuti in maggiore considerazione di altri, data la loro "origine scientifica". Una persuasione questa che evoca le seguenti riflessioni di Antonio Gramsci, dagli accenti quasi profetici, sull'affermazione di una "nuova sofistica", con le quali concludiamo questo tormentato paragrafo (*Quaderni del carcere - Il materialismo storico e la filosofia di Benedetto Croce* - si ringrazia lo studente Michele Panico per aver attirato la nostra attenzione sulle considerazioni in oggetto).

<<L'affermazione di Eddington "Se nel corpo di un uomo eliminassimo tutto lo spazio privo di materia e riunissimo i suoi protoni ed elettroni in una sola massa, l'uomo (il corpo dell'uomo) sarebbe ridotto a un corpuscolo appena visibile al microscopio>> [Cfr. *La natura del mondo fisico*, ed. francese, p. 20] ha colpito e messo in moto la fantasia di G.A. Borgese (cfr. il suo libretto). Ma che significa concretamente l'affermazione di Eddington? A rifletterci un po', non significa proprio nulla, oltre il suo significato letterale. [...] In realtà si tratta di puri giochi di parole, di scienza romanzata, non di un nuovo pensiero scientifico o filosofico, di un modo di porre le quistioni atto solo a far fantasticare le teste vuote. [...] Nella fisica di Eddington e in molte altre manifestazioni scientifiche moderne, la sorpresa del lettore ingenuo dipende dal fatto che le parole adoperate per indicare determinati fatti sono piegate a indicare arbitrariamente fatti assolutamente diversi. [...] La posizione dell'uomo rimane la stessa, nessuno dei concetti fondamentali della vita viene minimamente scosso e tanto meno capovolto. Le glosse dei diversi Borgese varranno solo, a lungo andare, a rendere ridicole le concezioni soggettivistiche della realtà che permettono simili banali giochetti di parole. [...] A quanto consta, è questo uno dei pochi esempi di infiltrazione fra gli scienziati italiani del modo di pensare funambolesco di certi scienziati specialmente inglesi a proposito della «nuova» fisica. [...]Si tratta, in ogni modo, di una fase transitoria e iniziale di una nuova epoca scientifica, che ha prodotto, combinandosi con una grande crisi intellettuale e morale, una nuova forma di "sofistica", che richiama i classici sofismi di Achille e della tartaruga, del mucchio e del granello, della freccia scoccata dall'arco che non può non essere ferma, ecc. Sofismi che tuttavia hanno rappresentato una fase nello sviluppo della filosofia e della logica e hanno servito a raffinare gli strumenti del pensiero. [...] E' da notare che accanto alla più superficiale infatuazione per le scienze, esiste in realtà la più grande ignoranza dei fatti e dei metodi scientifici, cose molto difficili e che sempre più diventano difficili per il progressivo specializzarsi di nuovi rami di ricerca. La superstizione scientifica porta con sé illusioni così ridicole e concezioni così infantili che la stessa superstizione religiosa ne viene nobilitata>>.

[A proposito dei contraddittori connubi ideologici dianzi criticati, è forse interessante sottolineare che Gramsci inquadra correttamente secondo la categoria di "concezioni soggettivistiche della realtà" i risultati delle pretese di costruire viceversa una scienza "oggettiva", nella misura in cui essa è concepita completamente formalizzata, ed "astratta", *i.e.*, separata dall'essere umano, che pur ne è al tempo stesso edificatore e destinatario. Una riproposizione insomma della polemica anti-antropocentrica, e quindi in certa misura anche evidentemente anti-umanistica, che fu all'origine della "scienza moderna": sono secondo noi questi antitetici "semi ideologici" la ragione dei fenomeni di *eterogenesi* su cui ci capiterà in seguito di ritornare.]

\- - - - -

Parte III

<<Sciocchezze quali la maggior parte dei paradossi non saranno mai minimamente prese in considerazione dalla vera logica>> (Carl Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, 1855, vol. I, p. 95 - citato da Dawson).

Il paradosso del mentitore

Nelle dimostrazioni precedenti si è menzionato il cosiddetto paradosso di Cantor-Richard, sicché ci sembra opportuno offrire al lettore maggiori informazioni al riguardo, e con l'occasione una breve rassegna dei principali paradossi logico-insiemistici in genere, [Sottolineiamo però che essi sembrano assolutamente assenti nella matematica "ordinaria", vale a dire la matematica concepita quale "investigazione delle leggi dell'intelletto", ossia quella avente per oggetto primo di studio "aritmetica" e "geometria", discreto e continuo, tempo e spazio, indagati mediante una "logica" che può ancora dirsi "ordinaria" (Hermann Weyl, *loc. cit.*, p. 283, parla propriamente di una <<deduzione [che] avveniva con quella sorta di *logica trascendentale* su cui si è soliti basarsi in geometria e in analisi>>, enfasi aggiunta).] anche perché avremo così modo di tornare su alcuni particolari, sia storici che tecnici, e di ribadire quanto il teorema di Gödel sia in realtà **meno semplice** di quel che inducono a far ritenere affrettate (e apologetiche) divulgazioni, quali quella del citato Rucker. [Si fa torto anche allo stesso Gödel, oltre che alla "verità", con il descrivere in modo troppo semplicistico il risultato delle sue ricerche, come purtroppo è oggi assai comune. Secondo un'annotazione del febbraio 1931 di Rudolf Carnap (1891-1970, studiò con Frege a Jena e con Einstein a Berlino; esponente del cosiddetto "positivismo logico", fu in relazione con Hans Reichenbach, insieme al quale fondò il giornale *Erkenntniss*, e con Moritz Schlick, membro di spicco del Circolo di Vienna, per il quale nel 1929 scrisse addirittura il manifesto programmatico, insieme ad Hans Hahn ed Otto Neurath, emigrò negli USA nel 1935, dove fu professore di filosofia a Chicago, Princeton, e Los Angeles, Università della California): <<Gödel hier. Über seine Arbeit, ich sage, dass sie doch schwer verständlich ist>>. Il lavoro sull'incompletezza è <<davvero difficile da capire>>, altro che storie. Tanto per offrire un ulteriore esempio di questioni alle quali chi avesse ben compreso l'argomento dovrebbe essere in grado di rispondere rapidamente, domandiamo: dato che le proposizioni G e Nctr(H) - tra loro equivalenti - sono indecidibili, e che per il teorema di consistenza deve esistere un modello dell'aritmetica, diverso certamente da quello *standard*, in cui sono "vere" le loro negazioni, ossia $\neg$G e $\neg$Nctr(H), qual è quel modello, e quale l'"interpretazione" in esso delle proposizioni $\neg$G e $\neg$Nctr(H)? (Almeno, per quanto riguarda le geometrie non euclidee, che vengono spesso chiamate ad esemplificare la problematica in oggetto, loro "modelli euclidei" sono perfettamente costruibili e comprensibili, pensiamo per esempio a quelli di Klein e di Poincaré.)] Tale opinione rimarrà viepiù confermata dalla circostanza che la discussione avrà l'inevitabile effetto di aggiungere alle perplessità di cui al paragrafo precedente alcuni nuovi "sospetti", in ordine a un possibile *fumus* di autoreferenzialità (giro vizioso), o di regresso all'infinito, nell'argomentazione di Gödel (all'importante questione, analizzata da Francesca Rivetti Barbò in diversi suoi lavori, e in un recentissimo articolo di Giuseppe Di Saverio, "Osservazioni sui teoremi di Gödel", si dedicherà la meritata attenzione altrove in questo sito). Si tratta peraltro di impressioni condivise in passato anche da altri matematici che non possono liquidarsi con le solite due parole di prammatica in simili casi: "lei non ha capito bene la questione, prima di parlare dovrebbe studiare di più". In effetti, poiché il teorema di incompletezza è strettamente, ed esplicitamente, legato al paradosso di

Cantor-Richard, oltre che a quello del mentitore, può venire il dubbio che sia esso stesso in realtà un paradosso: cioè, che la dimostrazione, pervenuta a un certo punto, venga interrotta con la pretesa di aver raggiunto una conclusione, laddove, volendo, si sarebbe potuto procedere oltre, pervenendo infine a qualche "nuova" contraddizione.

Non si possono non prendere le mosse dal "paradosso del mentitore", che ha origine antica, [Il che conferma tra l'altro l'opinione che tutta la fase del pensiero matematico che stiamo esaminando viene forse stimata al di là del suo autentico valore, e che non è infondato descrivere la ripresa di certe argomentazioni, in una veste ovviamente più "moderna", e più "oscura" per i non-specialisti (gli "specialisti" non hanno del resto nessun interesse a chiarire, anche solo nella misura in cui infatuati di ciò che hanno imparato dopo tanto sforzo), come l'avvento di una **nuova sofistica**. L'Epimenide di Creta - cui si fa riferimento come al primo inventore di un paradosso che fu poi ripreso da Eubulide di Mileto (IV secolo A.C.), e in seguito discusso sovente dalla filosofia classica e medievale - sembra essere vissuto nel VI secolo A.C.. Francesca Rivetti Barbò ha dedicato un intero libro a: *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo - Da Peirce a Tarski*, 1961. Sulla storia e il ruolo dei paradossi in generale menzioniamo anche: Piergiorgio Odifreddi, *C'era una volta un paradosso – Storie di illusioni e verità rovesciate*, 2001.] e che, nella sua palese "violazione temporale" (il "tempo" di un verbo che esprime un'azione non è un elemento da cui si possa prescindere alla leggera nell'"interpretazione", nel passaggio cioè dal parlato al pensato), fa a nostro parere da prototipo paradigmatico (nella propria caratteristica eminente di auto-referenzialità, o di circolarità) per numerosi altri paradossi del genere. Vediamo in che modo esso viene sinteticamente enunciato da Bertrand Russell in "Mathematical logic as based on the theory of types", 1908, e di seguito in *I fondamenti logici della matematica*, di Evert W. Beth (1908-1964, professore ad Amsterdam, fu anche assistente di Tarski).

<<The oldest contradiction of the kind in question is the *Epimenides*. Epimenides the Cretan said that all Cretans were liars, and all other statements made by Cretans were certainly lies. Was this a lie? The simplest form of this contradiction is afforded by the man who says "I am lying"; if he is lying, he is speaking the truth, and vice versa>>.

[Russell prosegue mettendo al secondo posto il suo paradosso, al quarto quello di Berry, *etc.*.]

<<Epimenide il cretese dice "io mento". Mente o dice la verità? Se mente, quanto dice non può essere vero e cioè egli dice la verità; se, d'altra parte, egli dice la verità, quanto dice deve essere vero e cioè egli mente. I due termini dell'alternativa si trovano dunque ad essere confutati. Al fine di prevenire "soluzioni" troppo semplicistiche di questa antinomia è opportuno sostituire l'affermazione di Epimenide con un enunciato un po' più esplicito. Consideriamo la frase seguente:

La frase in corsivo che si trova nel § 102 del libro di E.W. Beth intitolato "I fondamenti logici della matematica" e che comincia con le parole "La frase in corsivo" è falsa.

Se tale frase è vera essa dev'essere falsa e se è falsa allora essa dev'essere vera>>.

[Le righe riportate costituiscono ovviamente il § 102 del libro di Beth, che si chiude con un compiaciuto rimando al § 64, dal titolo "Impossibilità di una definizione del concetto di verità entro la sintassi elementare", in cui si espongono noti risultati di Alfred Tarski, il cui più famoso lavoro relativo alla tematica qui trattata è "The concept of truth in formalized languages", 1933. Un altro modo di esporre il paradosso in parola è di pensare a una moneta, su una cui faccia siano incise le seguenti parole: "L'affermazione riportata sul retro di questa moneta è falsa", mentre sull'altra si trovi invece scritto: "L'affermazione riportata sul retro di questa moneta è vera" (si tratta di un'osservazione contenuta in un'altra lettera di G.G. Berry a Russell, vedi tra breve - nell'originale si parlava in effetti di "the other side of this paper", e corrispondentemente si fa riferimento all'argomentazione in oggetto come al *visiting card paradox*).]

Prima di andare avanti, ci piace riportare (ancora da Dawson) un'osservazione di Ludwig Wittgenstein (filosofo che peraltro riteniamo in generale non così significativo come certa sua attuale "beatificazione" lascerebbe supporre) relativa al paradosso del mentitore (e ad altre simili piacevolezze): <<La contraddizione che nasce quando qualcuno afferma "Io mento" [...] è interessante soltanto perché ha tormentato la gente>>. In effetti, c'è da chiedersi se da un'origine così modesta (di cui si rendono ben conto gli apologeti, come il richiamo alla cautela nel non formulare soluzioni <<troppo semplicistiche>> da parte di Beth lascia chiaramente trasparire) si possa sviluppare qualcosa di davvero importante. [Riteniamo istruttivo, soprattutto per un pubblico di giovani, menzionare la "soluzione" che Giuseppe Di Saverio ha offerto alla nostra perplessità, citando due versi di una popolare canzone di Fabrizio De André: <<dai diamanti non nasce niente / dal letame nascono i fior>>!] Appare innegabile comunque, e avremo modo di constatarlo maggiormente nel seguito, che siffatti "sofismi" <<hanno servito a raffinare gli strumenti del pensiero>>, dando origine a interi nuovi campi di ricerca.

I paradossi di Cantor, Burali-Forti, Russell, König e Queneau

Facendo un balzo in avanti di un paio di millenni, la stagione moderna dei paradossi in matematica inizia "ufficialmente" [A parte alcune considerazioni preliminari di cui presto diremo, tale comune affermazione non tiene conto in realtà a nostro parere di un'importante eccezione, il cosiddetto "paradosso di Carroll", al quale dedicheremo l'appendice D (si tratta proprio del famoso Lewis Carroll, in realtà uno pseudonimo letterario del matematico Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898, eccentrico docente ad Oxford, di cui sono universalmente note le *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865). E' ormai tradizionale comunque iniziare con il paradosso di Russell la fase della storia della matematica che viene indicata con il termine "crisi dei fondamenti" (*Grundlagenkrise*), coniato per l'occasione da Hermann Weyl ("Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", 1921 - un lavoro concepito in difesa dell'intuizionismo brouweriano). La crisi si considera convenzionalmente chiusa proprio con l'articolo di Gödel del 1931, che in qualche senso pone termine alle ottimistiche attese dei (ri)fondatori della matematica di fine '800.] con la pubblicazione nel 1903 (in appendice al secondo volume dei *Grundgesetze der Arithmetik*) della lettera, datata 16 giugno 1902, che Bertrand Russell inviò a Gottlob Frege, descrivendo il dilemma logico in cui si precipitava quando si andasse a considerare la classe R di tutte le classi X che non contengono se stessa come elemento: $R = \{X \text{ tali che } X \notin X\}$. [Qui "$X \notin X$" avrebbe le veci di un predicato monadico "ben formato", in un sistema formale esprimente la teoria degli insiemi, secondo certe "regole" evidentemente troppo permissive, bisognose pertanto di revisione. Si noti anche in questo caso la presenza del procedimento che ci piace chiamare di *antidiagonalizzazione*, già usato da Cantor nella più famosa delle dimostrazioni del teorema di non numerabilità del continuo, e che abbiamo visto all'opera nella dimostrazione originale del teorema di incompletezza. Sulla questione avremo modo di ritornare.]

Il paradosso di Russell era stato in effetti preceduto da alcune considerazioni dello stesso Cantor (risalenti già al 1895, seppur al tempo non pubblicate) in ordine ai problemi originati dall'introduzione della cosiddetta *classe totale* (l'insieme di tutti gli insiemi), e conseguentemente del *massimo numero cardinale* (Cantor, 1899), la cui esistenza è impossibile in virtù di quello che oggi si dice comunemente il *II teorema di Cantor-Bernstein*: La cardinalità dell'insieme delle parti P(X) di un qualsiasi insieme X è strettamente maggiore di quella dell'insieme X di partenza. Un analogo paradosso, relativo però all'impossibilità di un *massimo numero ordinale*, fu presentato nel 1897 ("Una questione sui numeri transfiniti") da Cesare Burali-Forti (nato ad Arezzo nel 1861, laureato a Pisa, fu assistente di Peano a Torino, dove morì nel 1931, senza aver proseguito la carriera universitaria; tra i suoi meriti, a strettamente minoritario parere dello scrivente, la strenua opposizione alla teoria della relatività).

La storia del successivo paradosso è alquanto curiosa. Nel 1904 Julius König (1849-1913, ungherese, divenne professore a Budapest, dopo aver studiato a Vienna, Heidelberg, Berlino), durante i lavori del già menzionato III Congresso internazionale, propose una soluzione negativa per la *seconda* delle questioni proposte da Hilbert nel contesto del suo *primo* problema sull'ipotesi del continuo (di cui si è già riportato un brano verso la fine della parte I):

<<Let me mention another very remarkable statement of Cantor's which stands in the closest connection with the theorem mentioned and which, perhaps, offers the key to its proof. [...] The question now arises whether the totality of all [real] numbers may not be arranged in another manner so that every partial assemblage may have a first element, *i. e.,* whether the continuum cannot be considered as a well ordered assemblage - a question which Cantor thinks must be answered in the affirmative. It appears to me most desirable to obtain a direct proof of this remarkable statement of Cantor's, perhaps by actually giving an arrangement of numbers such that in every partial system a first number can be pointed out>>.

[Tale intreccio di questioni diverse (ripetiamo, l'ipotesi del continuo e l'esistenza di un buon ordinamento su un qualsiasi insieme infinito), e di ben differente portata, nonostante la sensazione di Hilbert, è all'origine di un curioso equivoco nel citato "La logica nel ventesimo secolo", p. 196, laddove si afferma che König avrebbe supposto invece vera l'ipotesi del continuo, e da questa assunzione avrebbe tratto una contraddizione.]

Si supponga infatti esistente un buon ordinamento dell'insieme dei numeri reali *R*, e si introduca il sottoinsieme *R'* di *R* costituito da tutti quei numeri reali "definibili" utilizzando un qualsiasi linguaggio costruito su un alfabeto finito (o addirittura infinito numerabile, non farebbe alcuna differenza!). Orbene, *R'* risulta manifestamente numerabile, ma il primo dei numeri non definibili, certamente esistente in virtù della non numerabilità del continuo dimostrata da Cantor, e quindi della circostanza che *R-R'* è un insieme certamente diverso dal vuoto, risulterebbe un numero reale *ipso facto* definibile.

König fu successivamente costretto a ritirare la sua argomentazione quando nel 1905 Zermelo provò invece che ogni insieme ammette un buon ordinamento (vedi gli *Elementi di Matematica* reperibili nel nostro sito), come conseguenza del suo famoso, e controverso, "assioma della scelta", sicché l'argomentazione precedente si trasforma in un "paradosso", e come tale viene tuttora citato, anche perché diretto ispiratore dei due successivi di cui presto diremo.

[Val forse la pena di riportare il parere di Skolem relativo all'uso, peraltro assai comune, e a nostro parere niente affatto anti-intuitivo, del postulato di Zermelo: <<If one works within a completely formalized mathematics, based on a finite number of precisely stated axioms, there is nothing to discuss but questions of consistency and ease of manipulation. But in ordinary mathematical practice, *e.g.*, in the usual studies on continua which are never given by a set of specified formal rules, the axiom of choice is, in my opinion, definitely undesirable - a kind of scientific fraud>> (da una lezione del 1932; buffo sottolineare che nella prima dimostrazione del 1920 del più famoso teorema che porta il suo nome, Skolem abbia proprio fatto ricorso, e in maniera essenziale, all'assioma della scelta - la dimostrazione fu poi da lui migliorata sotto questo punto di vista nel 1922 e nel 1928). Tale concezione, a nostro parere strettamente "intuizionistica", fu ribadita da Skolem in un intervento al Congresso internazionale dei matematici del 1950: <<The very natural feature of my considerations would convince people that this finitistic treatment of mathematics was not only a possible one but the true or correct one>>, sicché ci sembra altamente apprezzabile il proposito espresso nel titolo di un recente articolo del matematico olandese F.A. Muller: "Deflating Skolem"!
(http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00001370/01/DeflatingSkolem.PDF)]

Uno stretto parente del paradosso di König è quello di Raymond Queneau (scrittore francese nato a Le Havre nel 1903, morto a Parigi nel 1976, noto per infatuazioni matematico-combinatorie che lo condussero a costruzioni linguistiche di dubbio fascino quali: <<Dans un hyperautobus plein de pétrolonautes, je fus martyr de ce microrama en une chronie de métaffluence: un hypotype plus qu'icosapige avec un pétase péricyclé par caloplegme>>), meno "nobile" e citato, forse perché non proviene da un matematico, e quindi mostra immediatamente tutta la sua povertà concettuale, davvero un semplice "gioco di parole". Detto "interessante" un numero naturale che ha qualche "particolarità", [3 è per esempio interessante in quanto primo dei numeri primi dispari; 245168190 non appare ad occhio interessante - ma si pensi al caso del grande matematico indiano Srinivasa Ramanujan, del quale l'amico G.H. Hardy ricorda avergli detto una volta di essere arrivato con un taxi il cui numero, 1729, era non interessante, ottenendo in risposta che invece quel numero *era* interessante, perché il più piccolo numero naturale che poteva essere scritto come somma di due cubi in due modi diversi: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$!] allora il primo dei numeri non interessanti (supposto che tale insieme sia non vuoto), diventa per ciò stesso interessante (ma volendo si potrebbe anche obiettare che se il primo dei numeri non interessanti è "abbastanza" interessante, non è però altrettanto tale il secondo, e ancor meno il terzo, *etc.*). Una caratteristica, quella di essere interessante, che viene a questo numero *a posteriori*, e che conduce in effetti a pensare ad "insiemi in espansione", i cui elementi non sono una volta per tutte *bestimmten* (determinati) e *wohlunterschiedenen* (ben distinti) alla nostra intuizione o al nostro pensiero, come viceversa proponeva Cantor nella sua primitiva definizione di insieme ("Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", 1895), che qui riportiamo integralmente con grande soddisfazione (propria di chi si ispira al criterio delle idee *chiare* e appunto *distinte* di Cartesio):

<<Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* uns[e]rer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von *M* genannt werden) zu einem Ganzen>>.

A proposito di "violazioni temporali", che si avvertono all'origine di tutti i pretesi paradossi logici, non sappiamo resistere alla tentazione di citare un'altra osservazione di Ludwig Wittgenstein, le cui opinioni nel presente contesto vengono benevolmente considerate quali <<un incidente spiacevole nel lavoro di un grande filosofo>> (ancora da Dawson):

<<"La proposizione P è indimostrabile" ha un senso diverso *dopo* che è stata dimostrata rispetto a quello che aveva *prima*>> (enfasi aggiunte).

Il paradosso di Cantor-Richard

Il ragionamento di König ispirò un professore di matematica di un liceo di Digione, Jules Antoine Richard (1862-1956), il quale nel 1905, in una lettera all'editore della *Revue générale des sciences pures et appliquées* scrisse: << [...] the *Revue* draws attention to certain contradictions that are encountered in general set theory. It is not necessary to go so far as the theory of ordinal numbers to find such contradictions>>. L'autore prosegue descrivendo un problema <<that presents itself the moment we study the continuum [...]>>. Riportiamo, per comodità del lettore, l'intero testo del breve scritto di Richard, anche se purtroppo soltanto nella traduzione inglese che si trova nel citato *From Frege to Gödel - A Source Book...*.

<<The principles of mathematics and the problem of sets
In its issue of 30 March 1905 the *Revue* draws attention to certain contradictions that are encountered in general set theory. It is not necessary to go so far as the theory of ordinal numbers to find such contradictions. Here is one that presents itself the moment we study the continuum and to which some others could probably be reduced. I am going to define a certain set of numbers, which I shall call the set E, through the following considerations. Let us write all permutations of the twenty-six letters of the French alphabet taken two at a time, putting these permutations in alphabetical order; then, after them, all permutations taken three at a time, in alphabetical order; then, after them, all permutations taken four at a time, and so forth. These permutations may contain the same letter repeated several times; they are permutations with repetitions. For any integer p, any permutation of the twenty-six letters taken p at a time will be in the table; and, since everything that can be written with finitely many words is a permutation of letters, everything that can be written will be in the table formed as we have just indicated. The definition of a number being made up of words, and these words of letters, some of these permutations will be definitions of numbers. Let us cross out from our permutations all those that are not definitions of numbers. Let u_1 be the first number defined by a permutation, u_2 the second, u_3 the third, and so on. We thus have, written in a definite order, *all numbers that are defined by finitely many words*. Therefore, the numbers that can be defined by finitely many words form a denumerably infinite set. Now, here comes the contradiction. We can form a number not belonging to this set. "Let p be the digit in the nth decimal place of the nth number of the set E; let us form a number having 0 for its integral part and, in its nth decimal place, p+1 if p is not 8 or 9, and 1 otherwise." This number N does not belong to the set E. If it were the nth number of the set E, the digit in its nth decimal place would be the same as the one in the nth decimal place of that number, which is not the case. I denote by G the collection of

letters between quotation marks. The number N is defined by the words of the collection G, that is, by finitely many words; hence it should belong to the set E. But we have seen that it does not. Such is the contradiction. Let us show that this contradiction is only apparent. We come back to our permutations. The collection G of letters is one of these permutations; it will appear in my table. But, at the place it occupies, it has no meaning. It mentions the set E, which has not yet been defined. Hence I have to cross it out. The collection G has meaning only if the set E is totally defined, and this is not done except by infinitely many words. *Therefore there is no contradiction.* We can make a further remark. The set containing [the elements of] the set E and the number N represents a new set. This new set is denumerably infinite. The number N can be inserted into the set E at a certain rank k if we increase by 1 the rank of each number of rank [equal to or] greater than k. Let us still denote by E the thus modified set. Then the collection of words G will define a number N' distinct from N, since the number N now occupies rank k and the digit in the kth decimal place of N' is not equal to the digit in the kth decimal place of the kth number of the set E>>.

[Per gli studenti che sanno quanta cura invitiamo ad adoperare nel tenere conto della non univocità della rappresentazione di un numero reale in forma decimale (vedi per esempio: http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/mat/fraz-cont.doc) sottolineiamo che l'accorgimento messo in atto da Richard sulle cifre 8 e 9 riguarda proprio tale aspetto della questione, sebbene il francese non sia esplicito su quale scrittura decimale di un numero voglia utilizzare per i valori eccezionali sotto questo punto di vista (e specifichiamo quindi noi che si faccia ricorso alla cosiddetta "scrittura lunga", *i.e.*, l'espressione in una serie di potenze non definitivamente nulla). Del resto, è questo un dettaglio su cui si sorvola in numerosi testi, fino ad arrivare all'esempio costituito dal citato *I fondamenti logici della matematica*, nel quale (p. 215) si segue Richard nella descritta ambiguità, ma senza mettere in atto la sua successiva cautela, affermando semplicemente: <<Definiamo il numero di Richard ρ dicendo: se il k-esimo decimale di r_k è 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, allora il k-esimo decimale di ρ sarà rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0>>, che non va bene. La descrizione del paradosso è invece corretta, anche dal punto di vista "filologico", in Mangione (*loc. cit.*, p. 224 - rileviamo però per inciso che l'indicazione di questa pagina manca nell'indice dei nomi, alla voce "Richard", come mancano pure le pp. 235 e 252, dove si tratta del parere di Peano di fronte ai "paradossi" e ad altre questioni fondazionali; strano destino, questo di Richard in relazione agli indici dei nomi: nel libro di Weyl non è neppure nominato, pur comparendo sia a p. 275 che a p. 280), in cui si trova, nel punto decisivo: <<Se l'n-esima cifra decimale dell'm-esimo numero di E è rispettivamente 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 prendiamo come n-esima cifra decimale di N 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1>>. Insomma, bisogna introdurre qualche espediente, e ce ne sono naturalmente diversi, per ovviare ai problemi legati alla non univocità di cui stiamo discutendo.]

Ci sembra interessante riportare il modo, un po' diverso da quello originale, con cui Hermann Weyl (*loc. cit.*) illustra il paradosso in questione, riferendolo semplicemente a una contraddizione inerente alla numerabilità dell'insieme delle "proprietà" aritmetiche che siano in qualche senso "definibili", o "decidibili" (lasciamo per il momento i due termini quasi sinonimi ed "imprecisati"). L'ultimo dei grandi [Usiamo l'appellativo ancorché li riteniamo nel complesso discutibili quanto ad inclinazioni filosofiche, che si possono genericamente descrivere come *anti-kantiane*, sulla scia peraltro della medesima professione di fede effettuata dal "padre fondatore" della "scuola" in oggetto, ossia il *princeps* Gauss.] geometri di Göttingen sottolinea prima di tutto come il "paradosso" non sia altro evidentemente che una riformulazione dell'argomentazione relativa alla non numerabilità del continuo offerta da Cantor nel 1890-91 ("Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre"), [Quindi, *non* dell'argomentazione relativa al medesimo tema contenuta nel breve articolo del 1874 ("Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen"), dove per la prima volta si dimostrano tanto quello che si dice il II teorema di Cantor, senza ricorrere però al procedimento che abbiamo chiamato di antidiagonalizzazione, quanto il I teorema di Cantor, sulla numerabilità dell'insieme N^2 delle coppie ordinate di numeri naturali. Una panoramica dei principali risultati della cosiddetta "aritmetica transfinita" si può trovare in: http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/mat/aritm-trans.doc.] al punto da chiamarlo, e abbiamo già sottolineato che tale scelta ci pare assai opportuna, *paradosso di Cantor-Richard*. Ecco poi come questo viene descritto. Numerate le proprietà in oggetto, e siano P_1, P_2, ..., si può introdurre una nuova proprietà (diciamola R in onore di Richard, così come all'inizio del presente paragrafo la lettera R era stata invece utilizzata in onore di Russell) al modo seguente: il numero naturale n soddisfa la proprietà R se esso non soddisfa la proprietà P_n. E' chiaro che R non può coincidere con alcuna delle P_i, per ogni i, eppure R appare al tempo stesso una proprietà ben definita, decidibile. L'analogia con il procedimento antidiagonale di Cantor è palese, quando in luogo di una proprietà P_i si consideri un'opportuna successione di 0 e di 1 (la funzione caratteristica del sottoinsieme associato a P_i), e si metta al posto j-esimo della riga i-esima il valore 1 se j soddisfa P_i, e 0 in caso contrario. Mediante detta costruzione, si ottiene una funzione caratteristica che possiamo considerare come una delle proprietà in discorso, definente direttamente il sottoinsieme dei numeri naturali che la soddisfano (come si sa, dalle funzioni caratteristiche ai numeri reali il passo è poi breve, quando si pensi a un numero reale compreso per esempio tra 0 e 1 scritto in forma binaria, $0{,}k_1k_2k_3...$). La differenza, forse non priva di significato, è che le proprietà non corrispondono biunivocamente a tali insiemi, nel senso che due diversi predicati (utilizziamo adesso il termine logico specifico) possono ben essere associati al medesimo insieme, in quanto un insieme può avere "definizioni" diverse (vuoto è tanto l'insieme dei numeri pari tali che il successivo sia pari, quanto l'insieme dei numeri il cui quadrato sia minore del numero stesso), e in fondo questa funzione definitoria vengono propriamente ad assumere i predicati, qualora interpretati sotto il profilo contenutistico.

Il paradosso di Cantor-Richard trovò subito grande notorietà, nonostante l'apparente "modestia" dell'argomento (ripetiamo però che ebbe il merito di aprire la strada a tutta una serie di ricerche su questioni quali definibilità, decidibilità, *etc.*, e che la sua rilevanza almeno sotto il profilo storico è indiscutibile, in quanto appunto ispiratore del teorema di Gödel), e la ragionevole spiegazione contestualmente fornitane dallo stesso ideatore. Questa fu fatta subito propria da Poincaré, che ne discusse in "Les mathématiques et la logique", 1906 (in una rivista dal titolo *Révue de Métaphysique et Morale*, un'intestazione che sarebbe considerata oggi alquanto anomala per ospitare un lavoro sui fondamenti della matematica). Esso fu commentato in quello stesso anno 1906 anche da Russell, e per ben due volte ("Les paradoxes de la logique", nella stessa *Révue...* appena nominata; "On some difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types"), e da Peano, il quale invece lo liquidò decisamente asserendo: <<exemplo de Richard non pertinet ad mathematica sed ad linguistica>> ("Super theorema de Cantor-Bernstein - Additione", 1906). [Val forse la pena di sottolineare che nel 1902 Russell aveva inviato anche all'illustre matematico torinese l'osservazione che tanto sconvolse Frege - conducendo però questi successivamente a ricredersi sulla bontà della linea che aveva seguito fino allora, vale a dire il tentativo di *riduzione della matematica alla logica*, e a sostenere che i matematici del suo tempo apparivano afflitti da un *morbus mathematicorum recens* - e che non risulta che Peano (saggiamente, se il particolare viene confermato) abbia mai risposto. Un indizio forse che, con il senno di poi, confondiamo oggi con il generico termine "logicismo" i tentativi del tipo appena detto, con quelli assai più apprezzabili di segno inverso, ossia di *riduzione della logica alla matematica*.]

Il paradosso di Berry

Chiudiamo il nostro rapido *excursus* sui paradossi con un cenno a quello di Berry [George Godfrey Berry era un bibliotecario della Bodleian Library di Oxford, che espose il suo ragionamento a Russell intorno al 1904. Il filosofo-matematico inglese lo presentò successivamente in diversi suoi lavori, a partire da quelli già segnalati del 1906.], che abbiamo visto anch'esso collegato al teorema di incompletezza tramite la dimostrazione di Chaitin-Boolos (com'è forse preferibile dire). Il paradosso del resto non è altro che una riformulazione del paradosso di Cantor-Richard, come sostiene Morris Kline in *Storia del pensiero matematico*, ed è attraverso le parole di questo autore che lo presenteremo ai lettori, facendolo precedere da quelle originali con cui lo descrisse Russell nel 1908 (nel già menzionato "Mathematical logic..."). [Mentre anche per il già citato Beth <<[L'antinomia di Berry] costituisce una istruttiva ed ingegnosa semplificazione della antinomia di Richard>>, il paradosso è però secondo noi nella forma più vicino a quello di König, e come tale mostra ancora meglio dell'*exemplo* di Richard i limiti filosofici di tale genere di "sofismi", dei quali una vasta parte del pensiero scientifico moderno sembra nutrirsi avidamente - forse perché incapace di trovare altrove maggiormente sostanziose forme di sostentamento. Di parere nettamente contrario al nostro sul valore dei paradossi è naturalmente Gödel, il quale arriva a sostenere che tra i meriti di Russell ci sarebbe quello di aver portato alla luce: <<il fatto sorprendente che le nostre intuizioni logiche (ossia le intuizioni relative a nozioni quali: verità, concetto, essere, classe ecc.) sono autocontraddittorie>>. Tali parole, la cui "gravità" è manifesta, sono all'origine della nostra prima avversione nei confronti di Gödel, e ci hanno condotto in seguito agli approfondimenti di cui queste pagine sono un risultato. Esse sono parzialmente riportate da Weyl, *loc. cit.*, p. 288, senza l'indicazione della fonte, che è un articolo del 1961 dal titolo "The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy". Per quel che ne sappiamo, lo scritto è apparso soltanto postumo nel terzo volume dell'edizione dei *Collected Works* di Gödel, Oxford University Press, 1995.]

<<The number of syllables in the English names of finite integers tends to increase as the integers grow larger and must increase indefinitely, since only a finite number of names can be made with a given finite number of syllables. Hence the names of some integers must consist of at least nineteen syllables, and among these there must be a least. Hence "the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables" must denote a definite integer; in fact it denotes 111,777. But "the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables" is itself a name consisting of eighteen syllables; hence the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables can be named in eighteen syllables, which is a contradiction. [This contradiction was suggested to me by Mr. G. G. Berry of the Bodleian Library.]>>.

[L'indicazione del numero naturale 111777 - come preferiamo scriverlo senza la virgola, che poi in italiano sarebbe un punto - trae la sua ragione dal numero delle sillabe del "nome" inglese del numero in questione, che è proprio 19: one hundred eleven thousand seven hundred seventy seven. Naturalmente, se ci si riferisse univocamente al nome di un numero in una determinata lingua, a specificare il "vago" (*i.e.*, non chiaro e distinto) concetto di "nameable", allora non esisterebbe alcun paradosso.]

<<Il paradosso semplificato, noto anche come paradosso di Richard, recita: ogni intero può essere descritto con parole che richiedono un certo numero di lettere. Per esempio il numero 36 può essere

descritto come trentasei o come quattro per nove. La prima descrizione adopera nove lettere, la secondo quattordici. Non c'è un unico modo di descrivere un numero dato qualsiasi, ma questo non è essenziale. Ora dividiamo tutti gli interi positivi in due gruppi, il primo che include tutti quelli che possono essere descritti (in almeno un modo) con al più cento lettere, e il secondo che include tutti quelli che richiedono un minimo di centouno lettere per essere descritti, non importa in quale modo. Solamente un numero finito di numeri può avere una descrizione con al più cento lettere, perché ci sono non più di 27^{100} espressioni con al più cento lettere (e alcune sono prive di significato). Esiste allora nel secondo gruppo un minimo intero. Ma esso può essere descritto dalla frase: "Il più piccolo intero non descrivibile con al più cento lettere". Ma questa frase richiede meno di cento lettere. Quindi il più piccolo intero non descrivibile con al più cento lettere può essere descritto con meno di cento lettere>>.

[Sottolineiamo che Kline fa riferimento a un alfabeto di una lingua europea come per esempio l'inglese, ma allora il numero 26 alla base della potenza sarebbe stato più opportuno, o meglio un altro ancora, qualora si prendano in considerazione anche altri utili "segni speciali", quali per esempio lo "spazio". E' poi chiaro che, se tra questi si inseriscono per esempio anche le cifre decimali, il particolare diventa rilevante quando si vuol tentare l'indicazione di un numero naturale che faccia le veci, peraltro "provvisorie", del 111777 di Russell. Di tale istruttivo frutto dell'umano ingegno del XX secolo Russell ebbe a dire che esso aveva: <<il merito di non andare al di fuori dei numeri finiti>> ("On Insolubilia and Their Solution by Symbolic Logic", 1973) - citazione dal già menzionato testo di Hersh.]

Alla ricerca di "soluzioni", qualche approfondimento critico

Come abbiamo ormai avuto modo di asserire più volte, il paradosso di Cantor-Richard è strettamente collegato alla dimostrazione del teorema di incompletezza (e in effetti è in tale contesto che il menzionato Weyl lo discute), sicché ci sembra opportuno diffonderci ancora un poco su tale connessione, sia per essere in grado di comprendere meglio il tipo di "soluzione" che viene offerta per il paradosso, sia perché avremo tra l'altro l'occasione di tornare sull'importante distinzione tra i *nomi* e le *cose* (oltre che tra "definibile" e "decidibile"). Prendiamo come punto di partenza un importante commento formulato ancora da Weyl (*loc. cit.*, p. 276):

<<Ma sia che descriviamo gli x-predicati con un procedimento sistematico di definizioni ricorsive (sistema Δ) o mediante un formalismo M, possiamo sempre numerare gli x-predicati costruibili [...] Formiamo allora la relazione binaria a due variabili S(z,x), "x ha la proprietà numero z". Il paradosso di Richard è inevitabile solo se: (a) le proposizioni del nostro sistema sono decidibili e (b) la relazione S stessa è costruibile. Per Δ l'ipotesi (a) è soddisfatta, per cui si conclude che S non è costruibile. Gödel tuttavia ha scoperto che in un formalismo M sufficientemente ampio S può essere costruita, e perciò conclude che non tutte le formule [di] M sono decidibili>>.

Prima di commentare a nostra volta il commento, cerchiamo di descrivere nuovamente il paradosso (sperando di non essere incorsi in incomprensioni, e di non accrescere così la confusione!), distinguendo però tra insiemi e proprietà (definizioni degli insiemi). Accettiamo pure il quadro epistemologico fin qui descritto, e consideriamo l'insieme I di tutti i predicati monadici di un sistema formale H capace di descrivere l'aritmetica (che potremmo supporre pure ω-coerente, o meglio che abbia esattamente *N* tra i suoi modelli). Introduciamo la corrispondenza $\Phi : I \to P(N)$

(qui $\rightarrow$ sta evidentemente per il simbolo di funzione, e non di implicazione logica formale), che ad ogni predicato F(x) associa l'insieme Φ(F) dei numeri naturali n tali che l'asserto $\forall x(x=\ulcorner n \urcorner \wedge F(x))$ (che abbrevieremo ancora con il simbolo F(n)) è dimostrabile in H. E' chiaro, come abbiamo già avuto modo di accennare, che Φ non è né iniettiva, né suriettiva (I è un insieme numerabile, P(*N*) ha la cardinalità del continuo), sicché possiamo considerare l'immagine D = Im(Φ) $\subset$ *N* (D sarà anch'essa numerabile), e concepirla per esempio come "l'insieme dei sottoinsiemi di *N* che risultano definibili in H". Bene, scatta adesso la costruzione di Cantor-Richard. Fissata una numerazione di I, e sia F_1, F_2,..., [Per esempio quella indotta dall'ordinamento lessicografico di W(L), ma non necessariamente. Non è forse inutile rammentare che la potenza del continuo entra nel gioco pure sotto questo aspetto, perché, come noto, non è soltanto P(*N*) ad avere la cardinalità del continuo, ma anche l'insieme delle numerazioni di un insieme numerabile.] possiamo costruire l'insieme R costituito da quei numeri naturali n tali che $F_n(n)$ non è dimostrabile in H. La questione che si pone adesso è: R appartiene o no a D? Da un canto sembrerebbe di doversi rispondere di sì, dal momento che R è stato appena "definito", dall'altro, se R fosse un elemento di D, allora dovrebbe esistere un predicato K(x) tale che R = Φ(K), ossia R sarebbe l'insieme dei numeri naturali n tali che K(n) è dimostrabile. Ma questo predicato K(x) dovrebbe possedere un proprio numero N nell'assegnata numerazione di I, K(x) = $F_N(x)$, sicché ci troveremmo nel seguente imbarazzo. Se N $\in$ R = Φ(K), allora K(N) deve essere dimostrabile, in forza della definizione di Φ, mentre K(N) = $F_N(N)$ non è dimostrabile, in forza di quella di R. Se invece N $\notin$ R, allora $F_N(N)$ deve essere dimostrabile per la definizione di R, e quindi deve risultare, per la definizione di Φ: N $\in$ $\Phi(F_N)$ = Φ(K) = R. Ogni alternativa implica la sua opposta, e quali sono allora le possibili vie di uscita? O la funzione Φ non è così "ben definita" come sembra, [Abbiamo già notato come l'incompletezza significhi appunto l'esistenza di proposizioni indecidibili non solo del tipo $\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \leftrightarrow F(x))$, ma anche del tipo $\forall x(x=\ulcorner m \urcorner \rightarrow F(x))$.] o R non è definibile in H, ovvero non esiste alcun predicato K(x) che abbia la proprietà: K(n) è dimostrabile ses $F_n(n)$ non è dimostrabile. La situazione ci riporta direttamente nel regno dell'incompletezza e dell'indecidibilità: sappiamo infatti che Φ(F), seppur possa dirsi provvisoriamente "definibile", non è però necessariamente "decidibile", nel senso che, assegnato un arbitrario *input* n, numero naturale, non si è in grado di decidere se n sia o no un elemento di Φ(F). In altre parole, la nostra macchina ideale adibita al controllo si fermerebbe se F(n) è dimostrabile, o se $\neg$F(n) è dimostrabile, ma potrebbe non fermarsi se F(n) è indecidibile (indimostrabile e tale però che pure la sua negazione sia indimostrabile), un caso che, come sappiamo appunto per il teorema di incompletezza, potrebbe verificarsi.

[Riassumiamo la conclusione, tornando così al nostro tema principale: per quanto concerne il paradosso del mentitore, l'idea "brillante" che apre la strada al teorema di incompletezza consiste nella sostituzione del termine "falso" con il termine "non dimostrabile", e più o meno la stessa cosa avviene per il paradosso di Cantor-Richard.]

Il commento di Weyl presenta un altro aspetto istruttivo, in quanto fa comprendere una delle chiavi di volta su cui si fonda la successiva scorrevole deduzione "logica":

<<in un formalismo M sufficientemente ampio S può essere costruita>>, un'asserzione che ha a che fare con la dimostrazione dell'esistenza di quella "controparte formale" su cui Boolos per esempio "sorvola": <<La nostra dimostrazione [...] è perfettamente completa, salvo per certi aspetti tecnici di cui tratteggeremo la dimostrazione>>. L'aspetto tecnico consiste nella costruzione del predicato diadico A(x,x') (nel caso della dimostrazione originale gödeliana, dei predicati D(x,x') ed R(x,x',x")), che viene sbrigata con le seguenti parole: <<La codificazione gödeliana, e alcuni trucchi di teoria dei numeri permettono allora nelle formule dell'aritmetica di codificare ogni discorso relativo ai simboli, alle successioni e alle operazioni di M>> (utilizziamo la traduzione italiana del citato libro di Hersh).

Alla medesima questione viene dato esplicito risalto, in modo decisamente più accettabile in quanto a riconoscimento delle difficoltà tecniche e concettuali insite nella dimostrazione del teorema di incompletezza, anche nel citato libro di Meschkowski, che dedica all'argomentazione di Gödel un capitolo simile in spirito al presente scritto:

<<Poiché ora ogni dimostrazione formale si può costruire, seguendo le regole deduttive, partendo dagli assiomi fino a pervenire alla formula conclusiva da dimostrare, deve sussistere un certo rapporto anche tra il numero di Gödel della formula conclusiva da dimostrare e quello dell'intera dimostrazione. L'analisi precisa di questo "rapporto" [...] non è affatto semplice e deve qui essere omessa. Siamo costretti a limitarci ad accettare il seguente risultato: Esiste una formula A(n,m) che è vera se, e soltanto se, m è il numero di Gödel della dimostrazione di $F_n(n)$>>.

In tutti i citati casi, si sta facendo palese riferimento al teorema V dell'articolo di Gödel, quello che precede immediatamente il teorema VI, enunciante la famosa incompletezza. [L'articolo del 1931 (reperibile anche in traduzione italiana, nell'edizione delle *Opere* pubblicata da Boringhieri), è suddiviso in 4 sezioni, consiste di oltre 20 pagine, e di 11 teoremi (il porisma sulla indimostrabilità della non-contraddittorietà è proprio il teorema XI). Il primo paragrafo funge sostanzialmente da introduzione e presentazione dei risultati; il secondo, il più lungo dei quattro, descrive i sistemi formali usati, la gödelizzazione, alcune proprietà delle funzioni e relazioni ricorsive, fino alla dimostrazione del teorema di incompletezza; il terzo indaga alcune possibili forme che possono assumere le proposizioni indecidibili dei sistemi formali considerati, e descrive quindi quella che si può definire l'incompletezza diofantea; il quarto ed ultimo paragrafo è dedicato al cosiddetto II teorema di incompletezza.] Il teorema in questione suona nel seguente modo, adattato alla presente terminologia e simbolismo, e al caso di due sole variabili: Se è data una relazione numerica binaria ricorsiva R(m,n), allora esiste nel sistema formale H un predicato diadico R(x,x') tale che, per ogni coppia ordinata $(m,n) \in N^2$, m ed n sono in relazione mediante R se l'enunciato $\forall x\forall x'(x=\ulcorner m\urcorner\wedge x=\ulcorner n\urcorner\wedge R(x,x'))$ è dimostrabile in H, mentre m ed n non sono nella relazione R se è dimostrabile in H l'enunciato $\neg\forall x\forall x'(x=\ulcorner m\urcorner\wedge x=\ulcorner n\urcorner\wedge R(x,x'))$. [Nel suo articolo Gödel chiamava "ricorsive" le funzioni che oggi si chiamano "primitive ricorsive". Noi abbiamo qui utilizzato la terminologia successivamente affermatasi, e quindi enunciato il teorema in una versione leggermente più generale. Una relazione numerica per esempio binaria R si dice ricorsiva se esiste una funzione ricorsiva $F : N^2 \rightarrow N$ tale che, per ogni coppia ordinata $(m,n) \in N^2$, m ed n sono in relazione tramite R se e soltanto se F(m,n) = 0.]

Detto che torneremo ancora sul paradosso di Cantor-Richard nell'appendice B, prendiamo spunto dalle considerazioni precedenti per cercare di comprendere un po' meglio un "trucco" essenziale contenuto nella dimostrazione di Gödel. Costruiamo allo scopo una *pseudo-dimostrazione* del teorema di incompletezza, come una semplice parafrasi del paradosso di Cantor-Richard. Mantenendo le notazioni precedenti, introduciamo la relazione numerica R(m,n) che significa: l'asserto $F_m(n)$ è dimostrabile in H, e quindi la relazione numerica opposta $\overline{R}$(m,n), che significa invece che $F_m(n)$ non è dimostrabile in H. Consideriamo quindi la "controparte formale" $\overline{R}$(x,x') di $\overline{R}$(m,n), e quindi il predicato monadico K(x) che da $\overline{R}$(x,x') si ottiene per diagonalizzazione: K(x) $\equiv$ $\overline{R}$(x,x). E' chiaro che esisterà un numero naturale N tale che K(x) = $F_N(x)$, e che K(N) è un asserto indimostrabile in H, anzi indecidibile. Questa è una pseudo-dimostrazione proprio perché la controparte formale indispensabile per la dimostrazione non si può ottenere come un'applicazione del menzionato teorema V, in quanto la relazione R(m,n), e la sua opposta, non sono affatto ricorsive, nel senso che abbiamo ormai diverse volte cercato di spiegare. Ecco perché il trucco di cui dicevamo consiste nella costruzione di una relazione numerica ternaria che è invece ricorsiva, di cui si può allora costruire una controparte formale, e di un predicato diadico che da detta controparte formale si ottiene saturando una variabile con un quantificatore universale. La strada è poi tutta in discesa, diagonalizzazione *etc.*, ma al predicato diadico in oggetto non si può arrivare "direttamente". Se abbiamo capito bene (e non è detto!), ciò mostra sia un altro punto sottile dell'argomentazione di Gödel, sia che la formalizzazione non corrisponde esattamente al progetto di <<un procedimento sistematico di definizioni ricorsive>>. Il passaggio dalla relazione ternaria a quella binaria rischia di occultare proprio tale non secondario particolare, che Weyl viceversa mette bene in evidenza (ripetiamo anche le parole di Bhupinder Singh Anand: <<a "constructive" argument successfully masks a "non-constructive" premise>>), e con ciò terminiamo il presente difficile paragrafo.

\- - - - - - -

Parte IV - Congedo

Eccoci giunti alla conclusione di questa rapida presentazione, con annesse riflessioni critiche, di un teorema di cui non si contano le interpretazioni scettico-nichilistiche, che hanno sullo sfondo i dubbi se sia possibile distinguere un essere umano da una macchina (problema dell'*Intelligenza Artificiale*, o *Dilemma di Turing*, "Computing machinery and intelligence", 1950), [La connessione in oggetto resta stabilita attraverso una catena di "sillogismi" di solito non esplicitamente enunciati: visto che la logica matematica può fondatamente ritenersi essere nient'altro che lo studio teorico delle "possibilità" di una macchina quale un moderno elaboratore elettronico, ecco che tale materia non avrebbe nulla a che fare con la matematica (pensiero), a meno che non si stabilisca ovviamente l'identità macchina = pensiero. Jean-Yves Girard ha pubblicato (http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html) su questo tema un breve divertente articolo, "Le théorème de Gödel ou une soirée avec M. Homais", la cui lettura ci sembra consigliabile a tutti. Qui ci limitiamo a riferire che l'autore incontra un certo politico, Monsieur Homais, il quale gli annuncia la decisione di ritirarsi dalla sua "arte", in quanto: <<Je ne crois plus à la politique et d'ailleurs comme l'a dit Régis Debray, la théorème de Gödel détruit l'idée-même de système. [...] Dé-so-lé mon cher, tous les systèmes, philosophiques, artistiques, politiques... en fait Gödel a démontré que la pensée ne peut se penser soi-même, que notre intelligence est limitée>>, al che l'interlocutore replica, <<dans ma barbe - Parle pour toi, vieux - [...] M. Gödel vous dit que le théorème limite les systèmes formels: donc vous voyez votre intelligence comme un système formel, comme une machine?>>. Ci sembra opportuno citare ancora nel presente contesto un importante articolo di Clifford Ambrose Truesdell (1919-2000, anch'egli dottore a Princeton nel 1943, e professore di Meccanica Razionale presso la Johns Hopkins University di Baltimora), "Il calcolatore: rovina della scienza e minaccia per il genere umano" (in *La Nuova Ragione: scienza e cultura nella società contemporanea*", a cura di Paolo Rossi, Ed. Il Mulino, 1981), la cui lettura non viene consigliata quasi mai agli studenti nel corso delle innumerevoli lezioni e conferenze dedicate a proposte interessate di "informatizzare" sempre più l'insegnamento della matematica, spendendo quindi ingenti somme per aule, tecnici, attrezzature, *etc.*, e tramutando alcuni dei corsi un tempo fondamentali e formativi in banali esercitazioni all'uso di taluni diffusi programmi di calcolo.] fino ad arrivare alle roboanti, ed inquietanti, dichiarazioni contenute nell'Introduzione del già nominato *Matematica la perdita della certezza*:

<<Vi sono tragedie provocate da guerre, carestie e pestilenze, ma vi sono anche drammi intellettuali generati dalla limitatezza della mente umana. Questo libro tratta dei drammatici colpi che scossero la più potente e straordinaria fra le imprese umane, lo sforzo più profondo e incessante da parte dell'uomo di utilizzare la propria ragione: la matematica. [...] Ma la crisi riesplose, provocata questa volta da un famoso articolo di Kurt Gödel in cui si dimostrava, oltre ad altri risultati significativi ed inquietanti, che i principi logici accettati dalle diverse scuole non potevano dimostrare la coerenza della matematica. [...] La speranza di trovare leggi e standard oggettivi e infallibili si è dissolta: l'Età della Ragione è ormai finita>>.

Ci vien voglia di ribattere che a certe persone basta evidentemente poco per perdere fiducia nella propria ragione, e che al contrario è proprio quando si fanno certe affermazioni che la nostra Ragione deve rendersi più vigile! Siamo persuasi che certe opinioni si siano affermate in maniera esagerata rispetto all'effettivo valore scientifico dei risultati su cui si fondano, e che pertanto il loro successo sia piuttosto da ascrivere a una passiva sottomissione a uno "spirito del tempo" (*Zeitgeist*), a una "moda del pensiero" la quale ha condizionato, pena la mancanza di "successo" (in termini di carriere accademiche, notorietà, *etc.*), gli stessi attori di questa storia, come ammette francamente lo stesso Gödel (in un appunto contenuto nella minuta di una lettera privata che si è fortunatamente conservata, ed è riportato in Dawson): <<a causa dei pregiudizi filosofici dell'epoca, ... un concetto di verità matematica obiettiva ... era accolto con il massimo sospetto e rifiutato da molti come privo di senso>>. Potrebbe essere tale elemento estraneo allo sviluppo di una normale contesa filosofica (ossia, la capacità "politica" di determinare vantaggi materiali, in un periodo in cui la "cultura" è organizzata e finanziata dai grandi stati, e dalle *lobbies* che li controllano, con l'inevitabile risultato di produrre una casta di intellettuali conformisti, servizievoli e avidi) il principale responsabile della presenza storica di innegabili, e sospette, "maggioranze bulgare" nel giudizio relativo a talune "conquiste" della scienza del XX secolo. [E potremmo forse specificare: tanto da una parte quanto da quella contraria, almeno finché ce n'erano due in competizione. Ci sembra di essere con tale parere in consonanza, seppur da sponde opposte, con il noto storico e filosofo della scienza Imre Toth, il quale parla, in contesti analoghi, di rivoluzioni di natura eminentemente *politica* (http://matematica.uni-bocconi.it/toth/toth3.htm). Forse non del tutto a caso l'VIII volume dell'opera di Geymonat prima menzionata si apre con un contributo di Renato Tisato, sui "Problemi fondamentali della pedagogia contemporanea", il cui primo paragrafo è intitolato "Società democratica in cammino e «rivoluzione copernicana»". Si tratta soltanto di una metafora (ripresa da John Dewey, *The School and Society*, 1899), ma molto più vicina al vero di quanto venga riconosciuto comunemente dagli storici della scienza. Riteniamo del resto poco saggio, come si sarà capito anche solo da una superficiale lettura del *Breve profilo...*, ripudiare frettolosamente, e con disdegno, l'ipotesi che esistano delle "*lobbies* intellettuali" preposte alla creazione, alla conservazione, e all'eventuale modifica, di quelli che Maurizio Blondet chiama *états d'esprit* (*Gli «Adelphi» della Dissoluzione - Strategie culturali del potere iniziatico*, 1994), ma sulla evidentemente assai importante questione, alla quale si dedica la giusta attenzione altrove nel nostro sito, basterà qui questo cenno.] Senza tale potente "attrattore", gli uni avrebbero continuato benevolmente (leibnitzianamente) a rimproverare agli altri la venerazione del "Dio intuizione", e il conseguente rischio di "soggettivismo" che esso comporta, [Ma l'idealismo *trascendentale* va ben al di là degli innegabili angusti limiti del soggettivismo, anche se, dovendo scegliere, preferiremmo comunque questi a quelli imposti dal material-meccanicismo, espressione di un anti-umanesimo di chiara influenza darwinista, che i suoi propri confini traccia sotto lo *slogan* del "rigore". Buffo è che i sostenitori di tale punto di vista si considerino i diretti eredi dell'illuminismo proto-moderno, con la conseguenza che il fenomeno relativo alla storia delle idee a cui si assiste in questo frangente può essere istruttivamente compreso mediante il concetto di *eterogenesi dell'illuminismo*, un esempio ulteriore del curioso connubio di elementi antitetici nel pensiero post-moderno. Concezioni di palese matrice darwinista, e quindi evoluzionistica, si accompagnano ad allucinazioni nominalistiche di tipo parmenideo: tutto sarebbe "fissato" nella biblioteca di Babele, tranne naturalmente le forme pure dell'intuizione spazio-temporale dell'essere umano (che peraltro ai testi presenti nella biblioteca è chiamato ad attribuire "significato"), tutto sarebbe incerto, tranne naturalmente i "teoremi" sui quali tale incertezza riposa. Secondo il citato Tisato: <<La psicologia dell'età evolutiva avanza addirittura l'ipotesi che le stesse intuizioni di tempo e di spazio dei fanciulli nati nell'epoca del pieno sviluppo dei mezzi di comunicazione ultraveloci e capaci di metterci in contatto pressoché immediato con eventi verificantisi in luoghi remotissimi dello spazio terrestre ed extraterrestre, siano profondamente modificate rispetto a quelle delle generazioni precedenti>>. Fa eco a siffatte considerazioni il matematico lèttone (University of Latvia) Karlis Podnieks, il quale, per interpretare l'incompletezza diofantea, pone esplicitamente (e, diremmo noi, dualmente) la questione: <<Natural Numbers Evolving?>> (http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html).] e questi avrebbero a loro volta benevolmente replicato ai "formalisti" anti-metafisici che i loro sistemi appaiono <<artificiosamente restrittivi>>. [E' questa un'espressione di Paul Finsler (1894-1970, altro matematico tedesco che si trovò ad operare a Göttingen, ma in uno spirito più vicino a quello originale di Cantor), a cui Alonzo Church replicò seccamente che: <<questi concetti "restrittivi" hanno almeno il merito di essere comunicabili in modo rigoroso da una persona all'altra>> (citiamo ancora da Dawson).]

L'osservazione di Finsler ci offre l'opportunità di sottolineare che ci rendiamo ben conto che nelle nostre critiche alla *vulgata* abbiamo oscillato tra due posizioni che potrebbero a prima vista apparire contraddittorie. Da un canto il punto di vista di coloro che ritengono la "formalizzazione" compiuta dai logico-intuizionisti eccessivamente restrittiva, dall'altro quello di coloro che, quali il menzionato Bhupinder Singh Anand, la ritengono viceversa troppo espressiva, capace cioè di produrre, affidandosi ciecamente ad automatismi di formazione e di derivazione, degli asserti "ben formati" e "veri", privi però di "significato" intuitivo ed univoco. Non ci sembra però che le descritte posizioni critiche, entrambe assolutamente minoritarie, [La cui comunque riscontrabile continua presenza storica la dice comunque lunga su quanta "fede" sia necessaria per accettare l'impostazione "skolemistica", e rinunciare al dualismo discreto-continuo della ragione pura. Sempre Meschkowski riferisce che secondo Heinrich Scholz (1884-1956, filosofo e teologo tedesco, che cercò di elaborare i criteri per cui la teologia potesse presentarsi come scienza) l'articolo di Gödel costituirebbe addirittura la "Critica della ragione pura dell'anno 1931"!] siano in assoluto contrasto, potendosi in effetti verificare, quando si preferisce abbandonare la ragione e lasciare libero spazio alla "macchina", *tutti e due* i fenomeni. Vale a dire, ci si potrebbe sia imbattere in casi in cui enti distintamente concepibili non risultano però definibili attraverso le procedure formali fissate, sia in casi in cui tali procedure costringerebbero a ritenere viceversa ben definiti enti che tali non appaiono però al controllo dell'umana ragione, ultimo ed unico possibile criterio di giudizio (trascurando eventuali interventi di origine "soprannaturale", od extra-terrestre). Una volta di più, ci sembra che, a partire dal dibattito sui fondamenti della geometria (al nostro parere sul ruolo, e sul valore, delle cosiddette *geometrie non euclidee* a favore della *vulgata* qui messa in discussione abbiamo già accennato), si sia smarrita strada facendo l'opinione che non sono tanto né la "verità", né la "coerenza", le prime caratteristiche di un sistema matematico, bensì l'*adeguatezza*. L'*adaequatio* contempla d'altronde l'*esistenza* di *due* termini da adeguare, ed è proprio contro pretese *ontologiche* di questo tipo che si è mossa a nostro parere la ristrutturazione, o il riorientamento, della matematica, effettuato a partire dall'ultimo trentennio del XIX secolo (basti rammentare l'impressionante e ravvicinata sequenza di opere sui "fondamenti": *Grundlagen der Arithmetik*, Frege, 1884; *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert, 1899; *Grundlagen der Mathematik*, Hilbert e Bernays, due volumi, 1934 e 1939) soprattutto da parte di personaggi riconducibili a quel "movimento di idee" a cui si può fare suggestivo riferimento con il termine: *lo spirito di Göttingen*.

Si sarà ben compreso che al termine del nostro studio siamo pervenuti a un deludente approdo (una delusione che ci sarebbe stata risparmiata, se in età scolare qualcuno ci avesse riferito dell'obiezione di Hilbert relativa alla inevitabile circolarità dei tentativi logicistici di fondazione): la diffusa opinione che la logica matematica sia capace di offrire risposte ad aspettative filosofico-fondazionali è alquanto discutibile, nella misura in cui tale materia non può rinunciare, nella veste di intermediari che soli le possono offrire qualche "senso", almeno alla teoria degli insiemi e all'aritmetica (e lasciamo stare poi le questioni relative a in quale misura la seconda si possa ritenere assorbita dalla prima, e all'assenza della "geometria" in tutto questo genere di considerazioni). Come dire che non solo è possibile condurre una vita tranquilla da matematici senza logica matematica, come riconosciuto da Ellenberg, ma che s'ingannerebbe chi, per soddisfare qualche scrupolo fondazionale, si aspettasse grandi novità dalla frequentazione con gli sviluppi che tale materia, a nostro parere decisamente sopravvalutata nell'inconscio collettivo dei matematici che in genere la conoscono poco, ha assunto nel XX secolo. Riteniamo in ogni caso che sia utile fare una sua seppur rapida conoscenza, e non solo per il piacere generale che consegue dall'assaggiare le pietanze più disparate, ma anche per costruirsi strumenti adeguati da adoperare a "difesa" del proprio intelletto da certi suadenti canti di sirene.

Si tratta evidentemente di questioni che richiedono un maggiore approfondimento, storico, filosofico, tecnico, ed esprimendo allora a noi l'auspicio di poter tornare in futuro su questi temi con un lavoro di più ampio respiro, e ai più giovani lettori quello che possa essere loro consentito di accettare o rifiutare in piena libertà ed autonomia certe conclusioni, senza mai dover essere costretti a rassegnarsi allo spirito del tempo, [Di *epistemologia della rassegnazione* parla esplicitamente il fisico teorico Franco Selleri (vedi altrove nel nostro sito) nel descrivere gli effetti prodotti dall'analoga "rivoluzione" (relativistica e quantistica, secondo le interpretazioni cosiddette "ortodosse") nei fondamenti della fisica, mentre un <<atteggiamento prevalente di rassegnazione>> viene pure constatato da Hermann Weyl, *loc. cit.*, p. 269 (inoltre, a p. 271: <<nessuno ha avuto il coraggio di portare la battaglia nel campo dell'analisi>>).] vuoi fidandosi troppo del parere interessato dei cosiddetti "esperti", vuoi diventando degli esperti interessati essi stessi, ci piace terminare prendendo in prestito dal nominato Di Saverio la seguente brillante descrizione della propria esperienza di studioso dei teoremi di Gödel (una descrizione che, nonostante i numerosi anni di differenza a separare i due, si presta perfettamente a descrivere anche quella dello scrivente):

<<La lettura dell'articolo di Gödel è stata un'esperienza totalmente diversa dalla lettura di qualsiasi altra pagina di matematica che ci è capitato di fare nel corso degli studi universitari. Quando si è arrivati in fondo all'ultima dimostrazione dell'ultimo teorema, la sensazione è quella di aver capito tutto e di non aver capito niente. Appena un concetto riesce ad emergere dalla nebbia dei simboli, per apparire finalmente chiaro, è la sua stessa chiarezza che porta alla individuazione di altri e ben più oscuri misteri. E questo processo pare non finire mai>>.

\- - - - - - -

Parte V - Appendici

A - La "dimostrazione" di Rucker (http://www.miskatonic.org/godel.html)

The proof of Gödel's Incompleteness Theorem is so simple, and so sneaky, that it is almost embarassing to relate. His basic procedure is as follows:

1 - Someone introduces Gödel to a UTM, a machine that is supposed to be a Universal Truth Machine, capable of correctly answering any question at all.
2 - Gödel asks for the program and the circuit design of the UTM. The program may be complicated, but it can only be finitely long. Call the program P(UTM) for Program of the Universal Truth Machine.
3 - Smiling a little, Gödel writes out the following sentence: "The machine constructed on the basis of the program P(UTM) will never say that this sentence is true." Call this sentence G for Gödel. *Note that G is equivalent to: "UTM will never say G is true."*
4 - Now Gödel laughs his high laugh and asks UTM whether G is true or not.
If UTM says G is true, then "UTM will never say G is true" is false. If "UTM will never say G is true" is false, then G is false (since G = "UTM will never say G is true"). So if UTM says G is true, then G is in fact false, and UTM has made a false statement. So UTM will never say that G is true, since UTM makes only true statements.
5 - We have established that UTM will never say G is true. So "UTM will never say G is true" is in fact a true statement. So G is true (since G = "UTM will never say G is true").

6 - "I know a truth that UTM can never utter," Gödel says. "I know that G is true. UTM is not truly universal."

Think about it - it grows on you ...

With his great mathematical and logical genius, Gödel was able to find a way (for any given P(UTM)) actually to write down a complicated polynomial equation that has a solution if and only if G is true. So G is not at all some vague or non-mathematical sentence. *G is a specific mathematical problem that we know the answer to, even though UTM does not!* So UTM does not, and cannot, embody a best and final theory of mathematics ...
Although this theorem can be stated and proved in a rigorously mathematical way, what it seems to say is that *rational thought can never penetrate to the final ultimate truth* ... But, paradoxically, to understand Gödel's proof is to find a sort of liberation. For many logic students, the final breakthrough to full understanding of the Incompleteness Theorem is practically a conversion experience. This is partly a by-product of the potent mystique Gödel's name carries. But, more profoundly, to understand the essentially labyrinthine nature of *the castle* is, somehow, to be free of it.

[Non è probabilmente casuale l'utilizzo della sigla UTM con la T come iniziale di TRUTH, quando comunemente la stessa sigla è utilizzata per indicare invece una Universal TURING Machine: Turing diventa con questo gioco subliminale quasi "sinonimo" di verità. L'autore della precedente argomentazione è un matematico (1946) del Department of Mathematics and Computer Science dell'Università di San José, alquanto noto per la sua attività come scrittore di romanzi di fantascienza (<<This period [1982-1986] marked the birth of cyberpunk science-fiction, and I became recognized as a founding father of the movement. My cyberpunk novels *Software* and *Wetware* each won a Philip K. Dick Award for best paperback SF novel of the year>>).]

B - Un altro tipo di gödelizzazione

Dedichiamo quest'appendice a un'illustrazione del paradosso di Cantor-Richard, siccome illustrato nel citato libro di Meschkowski (pp. 146 e segg.; lo stralcio che ne offriamo è in qualche punto non letterale, in quanto abbiamo cercato di rendere il testo adeguato al presente simbolismo e linguaggio). La lunga citazione dovrebbe avere il merito di chiarire anche eventuali perduranti zone d'ombra legate a concetti quali ricorsività, decidibilità, procedura, *etc.*, che oggi sono alla base della cosiddetta *informatica teorica*, senz'altro un "sottoprodotto" importante delle discussioni sul tema dei paradossi - che pure abbiamo dichiarato senza esitazioni, o pentimenti, "sofistiche". [Naturalmente, entrando nel campo sempre affascinante del *controfattuale* storico, la domanda che sorge inevitabile è: tale settore di studi avrebbe potuto avere origine altrimenti, a partire cioè da impostazioni filosofiche meno discutibili, ovvero non così smaccatamente anti-intuitive, o se si preferisce anti-antropocentriche?! Un'analoga domanda potrebbe porsi per l'altro *totem* (e *tabù*) della scienza del XX secolo, la teoria della relatività (non è secondo noi un caso che Einstein e Gödel fossero buoni amici a Princeton, e che il secondo abbia pure trovato, nel 1949, delle traiettorie nel quadro della relatività generale, le quali, piuttosto che essere interpretate come un segno di non-adeguatezza della teoria, hanno offerto fondamento scientifico alla concezione di un "tempo circolare", e suggerito spunto per l'assurda convinzione che siano possibili viaggi a ritroso nel tempo; Piergiorgio Odifreddi parla addirittura, nella sua introduzione a una recentissima riedizione di *L'ABC della relatività* di Russell, addirittura di "Santissima Trinità Intellettuale", aggiungendo ai due personaggi testè nominati anche il divulgatore inglese): le ricerche sull'energia nucleare avrebbero potuto svilupparsi anche senza relatività? Forse è proprio per non dare a tale domanda risposte diverse da quella oggi comune che le "strategie culturali del potere imperiale" non hanno finora permesso di chiarire diversi punti oscuri nello svolgimento di dette ricerche nella Germania del III Reich, condotte da scienziati per lo più anti-relativisti (addirittura *eteristi*). In tema, non può non venire alla mente l'analoga connessione che viene fatta dalla propaganda dei vincitori tra episodi relativi alla II guerra mondiale e un altro dei protagonisti della nostra storia (storia naturalmente "minore"), e cioè Alan Turing e il cosiddetto "progetto Enigma" (così a naso, ci sembra più verosimile supporre che certi successi siano riconducibili piuttosto ad operazioni di *intelligence*, e alla presenza di insospettabili "collaboratori" in campo nemico, che non a particolari abilità logico-matematiche-organizzative).]

Cominciamo ad illustrare in che maniera Meschkowski presenta prima di tutto un diverso procedimento di gödelizzazione, che non passa attraverso la decomposizione in numeri primi, e che ci sembra invero maggiormente apprezzabile da parte di un pubblico non specialistico (ma di "banalità" simili se ne possono evidentemente pensare a iosa). Si costruisca l'"alfabeto" L del nostro sistema formale H scrivendo ordinatamente tutti i segni con cui usualmente esprimiamo le nostre considerazioni di matematica o di qualsiasi altra materia, per esempio prima le lettere di un comune alfabeto linguistico europeo, quali:

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z

poi diciamo le cifre decimali:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

e ancora segni speciali, lettere accentate, maiuscole, insomma tutto quello che si desidera:

$\forall$, $\exists$, $\rightarrow$, ... , à, é, è,..., ... , A, B, C, ..., α, β,..., ...

Si facciano poi corrispondere tali segni agli elementi della serie numerica naturale, scritti per esempio secondo l'usuale rappresentazione decimale, 1, 2, 3,..., avendo però l'accortezza di scartare tutti i numeri che hanno uno 0 come cifra decimale (sicché per esempio j corrisponde nell'ordinamento indicato a 11 anziché a 10), e di usare invece lo 0 come separatore di segni all'interno di una medesima "stringa" (in questo cso siamo in W(L)), mentre un doppio zero, 00, fungerà da separatore tra stringhe all'interno di una medesima "frase" (o "testo", in questo caso siamo in W(W(L))). Così "babbo" diventa per esempio il numero naturale 2010202016, mentre la frase "il babbo non sta bene" diventa il numero naturale 901300201020201600150160150021022010020501505 (ci si diverta ad immaginare il numero naturale corrispondente a *I promessi sposi*, o alla *Divina Commedia*). Il numero 100 diventa invece naturalmente 31029029, *etc.*, divertente. E' chiaro che anche in questo modo si costruisce una "biblioteca di Babele" del tipo tanto vagheggiato dai "nominalisti" neo-pitagorici, e che "tutto" appare ancora una volta sotto la veste di numero: formule ben formate, predicati, asserti, dimostrazioni, ma anche poesie, brani musicali (introdotti naturalmente nell'alfabeto gli opportuni segni), pensieri (in quanto espressi in un linguaggio), e così via. [Dobbiamo sottolineare ancora una volta che tale universo parmenideo (simile per certi versi allo spazio-tempo della relatività di Einstein, dove tutto è fissato una volta per sempre, senza distinzioni tra passato, presente e futuro), in cui la funzione dell'*intelligenza*, nel suo significato proprio di *scelta* (nella biblioteca di Babele un autore non è chiamato a scrivere la sua opera, ma a sceglierla, frammezzo a una moltitudine di "varianti"), viene assegnata a delle macchine, non riscalda troppo il nostro intelletto, a differenza evidentemente di tanti (troppi) altri.]

Ciò premesso, veniamo al brano che volevamo sottoporre all'attenzione dei lettori.

> Quando in questo capitolo si parla di "funzioni", si intendono sempre (salvo contrario avvertimento) funzioni aritmetiche nel senso della nota a pie' di pagina 131. [Si chiama funzione aritmetica una funzione f(x) che associa a numeri interi non negativi 0, 1, 2,... (presi come argomento) numeri interi non negativi (come valori della funzione).] Chiamiamo una siffatta funzione, f(n), "computabile", se esiste un procedimento mediante il quale, per ogni valore n, il valore f(n) della funzione può essere calcolato *con un numero finito di passaggi*. Un esempio di una funzione computabile siffatta è $f_1(n) = n! = 1\times2\times3\times...\times n$. Un altro esempio è $f_2(n)$ = numero dei fattori primi di n. [...] Torniamo di nuovo alle funzioni "computabili". A ogni funzione siffatta è associato un "procedimento di calcolo" che ci dice come la funzione f(n) debba essere calcolata (per ogni n). Per f(n) = n!, per esempio, tale procedimento suona così: 0! = 1, e (Sn)! = n!×Sn. Mediante la "gödelizzazione" a questo procedimento viene associato il "numero di Gödel della funzione f(n)" [E qui ci sarebbe luogo per un'osservazione in forma di domanda: il numero di Gödel della funzione f(n), o di una "definizione" di f(n)? Gli insiemi, e le funzioni, non sono la stessa cosa delle loro definizioni linguistiche, o di altra natura, come abbiamo già avuto modo di sottolineare.] [...] Per mezzo del nostro "dizionario" siamo in grado di associare a ogni funzione calcolabile un numero naturale come "numero di Gödel" - mediante "gödelizzazione" del procedimento di calcolo. [...] Vogliamo ora definire, usando la "gödelizzazione", una funzione *non computabile*. Sia: g(n) = 1, se n non è il numero di Gödel di una funzione calcolabile, g(n) = f(n)+1, se n è il numero di Gödel della funzione calcolabile f(n). Tale funzione g(n) non può essere calcolabile. Poiché, in caso contrario, esisterebbe bene un numero di Gödel N per g(n), che si potrebbe ottenere "traducendo" il procedimento di calcolo valido per g(n). Ma allora sarebbe, per la definizione di g(n): g(N) = g(N)+1, e questa è una contraddizione. L'ipotesi che g(n) sia calcolabile è pertanto assurda. Ciò significa che non si può indicare, per esempio, la definizione stessa di g(n) come un "procedimento di calcolo". Questa definizione, invero, costituisce una "differenza di casi". E soltanto se la decisione che qui si richiede (decidere se n è il numero di Gödel di una funzione calcolabile o no) fosse "calcolabile", si potrebbe trarre dalla definizione di g(n) anche un "procedimento di calcolo". [...] Se si vuole, si può parlare di un *robot*, che compie automaticamente, in un certo qual senso, la decisione richiesta. Un *robot* siffatto non esiste per la funzione g(n): è quanto ci insegna la dimostrazione sopra sviluppata. Possiamo formulare il risultato anche nel seguente modo: *Non è decidibile, se n è il numero di Gödel di una funzione computabile*. Ciò vuol dire: non esiste una funzione computabile che assume il valore 1 quando, e soltanto quando, n è un numero di Gödel siffatto.

[L'affermazione precedente viene spesso sinteticamente riferita come: non è possibile per una macchina di Turing decidere se un'altra macchina di Turing si fermi oppure no.]

Prima di procedere oltre, invitiamo lo studente ad approfittare dell'occasione per soffermarsi opportunamente su altri esempi di procedure ricorsive, quali quelle fornite dalla somma e dal prodotto tra numeri naturali, [La prima rimane formalmente definita da: x+0=x, x+Sy=S(x+y), il secondo rimane a sua volta definito dalla somma mediante la procedura: x×0=0, x×Sy=x×y+x.] ripetendo che bisogna ammettere che l'aspetto relativo all'eventuale "decidibilità" di un sottoinsieme (tramite la computabilità della sua funzione caratteristica) appare in effetti conseguenza interessante, e "nuova", del genere di discussioni che stiamo cercando di illustrare (dovendosi tra l'altro "decidere", ci si perdoni il gioco di parole, la definizione di "decidibile").

Ci si può chiedere: cosa c'entra l'esempio di funzione non computabile offerto da Meschkowski con il paradosso di Cantor-Richard, a parte il ricorso all'onnipresente metodo dell'antidiagonalizzazione? C'entra, perché se si "decide" che i numeri reali "definibili" siano quelli tali che la successione delle loro cifre decimali possa essere calcolata mediante una determinata procedura automatica (programma), ovvero quelli tali che la successione delle loro cifre binarie corrisponda alla funzione caratteristica di un sottoinsieme "decidibile" di N (sorvoliamo pure noi sulla questione della non univocità delle menzionate rappresentazioni), ecco che, pur essendo nel contesto in esame i programmi un insieme manifestamente numerabile, e quindi pur essendo tale la totalità, diciamola ancora R', dei numeri reali definibili, ecco che R' non sarà ricorsivamente numerabile: in altre parole, da una *data* successione di numeri reali definibili (e si intende quindi anch'essa ricorsivamente assegnata) si potrà sì costruire per antidiagonalizzazione un numero reale definibile non coincidente con alcuno degli elementi del codominio della successione, ma ciò significa semplicemente che il codominio di una tale successione non potrà mai contenere tutti i numeri reali definibili, pena appunto la contraddizione di Cantor-Richard. [La nozione di ricorsività è in effetti precisabile in maniera matematicamente rigorosa, sebbene alquanto complicata; abbiamo qui fatto sempre implicito ricorso alla "tesi di Church", secondo cui la ricorsività corrisponde precisamente alla nozione "intuitiva" di "calcolabilità" mediante una qualsiasi procedura.]

Un possibile commento a questo tipo di "soluzione" è: eccoci ancora una volta di fronte alla proposta di rimpiazzare un concetto con un altro, in questo caso il concetto di "definibilità" (collegata alla possibilità di individuare in modo *chiaro e distinto* un ente del nostro pensiero frammezzo a una totalità di enti del nostro pensiero ad esso "omogenei") con quello di "definibilità effettiva" (ricorsività), o "decidibilità", e di negare conseguentemente lo statuto di definibilità ad enti che viceversa apparirebbe come perfettamente definiti. Confessiamo che tale conclusione ci lascia alquanto insoddisfatti, anche perché consiste in una dimostrazione per assurdo, [Del resto, il ragionamento utilizzato non è altro che una nota dimostrazione della non numerabilità del continuo, per la quale si veda volendo la Nota 13 nel citato ...fraz-cont.doc.] e non ci sembra quindi capace di fugare definitivamente i dubbi relativi alla circostanza se nell'argomentazione non siano per caso ancora rimasti aspetti paradossali. Avremmo preferito naturalmente una soluzione di diversa natura, diciamo pure "filosofica", e non un "gioco di parole", con cui si tende ad eliminare la difficoltà operando su una semplice modifica semantica dei "termini" in discussione.

Inoltre, sorge a questo proposito spontanea un'obiezione: è proprio vero che la nozione intuitiva di "calcolabilità" si precisa matematicamente con quella di "programma", che è composto necessariamente da un numero finito di segni del linguaggio ammesso, ossia è caratterizzato da una *lunghezza* finita? Finita, ribadiamo, non numerabile, e del resto proprio tale finitezza è la chiave di volta del paradosso di Berry, e della dimostrazione di incompletezza di Chaitin-Boolos. Insomma, un numero reale potrebbe pensarsi per esempio definibile non soltanto quando esiste un unico programma che ne calcoli tutte le cifre, ma quando esiste una *successione di programmi* che riesca a calcolarne le cifre, una per una, o "pezzo per pezzo". Cerchiamo di spiegarci meglio con un esempio, che una volta tanto non ha a che fare con il secondo teorema di Cantor, e l'antidiagonalizzazione, bensì con il primo teorema di Cantor, affermante, in maniera del tutto ostensiva, la numerabilità di N^2, ovvero, dell'infinito discreto "pluridimensionale". Ci sembra possibile pensare infatti una successione di programmi, diciamola σ, [Che è come dire una semplice funzione aritmetica, una volta che si siano gödelizzati i programmi!] tale che gli elementi di σ, diciamoli P_1, P_2,... siano coordinati a una successione di numeri reali definibili, diciamoli x_1, x_2,... (si considerino soltanto se si vuole dei numeri irrazionali compresi tra 0 e 1), nel senso che P_i riesce a calcolare le cifre della rappresentazione binaria di x_i. Una successione di cifre quindi essa sì ricorsiva, per ogni indice i, decidibile cioè mediante un programma, concepito però questo variabile da numero reale a numero reale. Possiamo immaginare inoltre che l'insieme delle lunghezze dei programmi P_i sia superiormente illimitato, per esempio crescente al crescere di i. Tramite σ possiamo poi "definire" perfettamente, secondo l'accezione comune, un numero reale x che non appare definibile però nello stretto senso finitario richiesto. Posto infatti $x_i = 0,a_{i1}a_{i2}a_{i3}...$, con simbolismo autoesplicativo, ecco che x potrebbe essere il numero $0,a_{11}a_{12}a_{21}a_{31}a_{22}a_{13}a_{14}a_{23}a_{32}a_{14}...$ (ma ci sono ovviamente infinite procedure, tutte intuitivamente "definibili", di numerazione). Un eventuale programma con cui si volessero computare *tutte* le cifre di x dovrebbe tenere conto di *tutti* i programmi P_i che computano quelle dei numeri x_i, perché nella costruzione di x intervengono *tutte* le cifre in oggetto, mentre abbiamo detto che l'estremo superiore delle lunghezze di questi programmi si può presumere infinito, e quindi un siffatto programma potrebbe non esistere. [Confessiamo però di non essere in grado di comprendere se il ragionamento indicato possa adattarsi anche alla costruzione del numero reale x ottenuto da σ con il procedimento antidiagonale: un altro chiaro segnale della non-intuitività di tale genere di questioni, e in definitiva quindi di "non-adeguatezza", a comprendere nel concetto anche la circostanza che si sarebbe costretti a riconoscere l'esistenza di numeri reali definibili e di numeri reali non definibili, mentre tale differenziazione non può neppure iniziare a porsi per i **punti** della "retta ordinaria", che sono al contrario concepiti dall'intuizione spaziale come tutti "uguali". La totalità dei numeri reali è però per costruzione "isomorfa" (anche se bisogna "decidere" in quale *categoria*!) alla retta ordinaria, in quanto tali numeri si desumono indubbiamente dalla detta intuizione geometrica dello spazio (quali risultato dell'operazione di *misura*), con buona pace delle costruzioni *aritmetizzanti* effettuate da Weierstrass, Dedekind & C. *con il senno di poi* – all'importante argomento viene dedicata la meritata attenzione altrove nel nostro sito.]

Per concludere, davvero non è possibile immaginare una differenziazione tra le nozioni "intuitive" di definibilità e di decidibilità (ciò che appunto sembra essere negato dalla tesi di Church interpretata in senso lato)? Bisogna ritenere che il numero reale x di cui sopra non sia concepito in maniera chiara e distinta, o che non possa mai essere tale la successione σ? [La domanda verte naturalmente sul dilemma se un ente matematico debba considerarsi "esistente" allora e solamente allora che esso sia "formalmente costruibile", e la risposta ci sembra non possa prescindere dal ruolo dell'intuizione umana, e quindi dall'esistenza ideale degli elementi primi della speculazione matematica - *Urelementen* - e di quelli che da questi si possono poi desumere per generalizzazioni ed analogie, ma sempre senza automatismi, facendo anzi costante ricorso al controllo della "ragione". Come ci piace pensare, la matematica verrebbe così ad essere concepita sotto un aspetto "dinamico", quale *passaggio da* "investigazione delle leggi dell'intelletto" a "investigazione delle leggi del pensiero di una mente infinita" - ovviamente, è proprio il caso di sottolinearlo nel presente contesto, una mente non contraddittoria!] Ci sembra difficile, almeno allo stato attuale delle nostre riflessioni, doverlo ammettere, sicché siamo costretti ad aggiungere anche questa alle riserve dianzi illustrate.

C - Dall'incompletezza sintattica all'incompletezza semantica

Abbiamo già più volte rilevato cone una notevole sorgente di difficoltà nell'interpretazione di certi risultati consista nell'uso dei termini che vengono scelti per descriverli: completezza e incompletezza, verità (o validità) e dimostrabilità, *etc.*, concetti per esempio gli ultimi due che vanno considerati ben distinti, come se un "fatto matematico" potesse dirsi "vero" senza anche essere stato (in qualche modo!) dimostrato tale. In particolare, appare spesso difficile comprendere la relazione tra teorema di completezza (1930) e teorema di incompletezza (1931), visto che essi trattano di due questioni apparentemente diverse. Riteniamo di dover precisare un poco la questione, anche perché permetterà di tornare sui già sottolineati limiti della logica del I ordine. Il teorema di completezza riguarda infatti il versante *semantico* della problematica in oggetto, mentre l'incompletezza gödeliana può essere dimostrata (e quindi enunciata) con esclusivo riferimento all'ambito *sintattico*, sicché la relazione tra i due teoremi non rimane manifestamente evidenziata. Si può però formulare il teorema di incompletezza anche utilizzando una logica di ordine superiore, [E' curioso riportare l'affermazione secondo cui: <<Many logicians would contend that there is no logic beyond first-order logic, in the sense that when one is forced to make all one's mathematical (extra-logical) assumptions explicit, these axioms can always be expressed in first-order logic, and that the informal notion of *provable* used in mathematics is made precise by the formal notion *provable in first-order logic*>>, *Handbook of Mathematical Logic*, p. 41. Il problema a questo punto diventa: si tratta di una convinzione "filosofica" degli autori, di un "teorema", o di che altro? Purtroppo, in questo tipo di discussioni abbondano esempi del genere, dove non è facile comprendere quale sia l'origine, o se si preferisce la "specie", di certe presunte "verità". Istruttiva, e in tema, ci appare al riguardo anche la seguente autorevole opinione (Yuri Matiyasievitch a proposito della tesi di Church, http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/H10Pbook/par_5_7.htm): <<Here we have encountered something rarely found in mathematics, a *thesis*. What is it? It is not a theorem because it has no proof. It is not a conjecture because it cannot have a proof. It is not even an axiom that we are free to accept or reject. All of this is due to the fact that Church's Thesis is not a precise mathematical statement, because it relates the rigorous notion of Turing (semi)decidability with the non-rigorous notion of (semi)decidability in the intuitive sense. What are the arguments in favor of Church's Thesis? They may be very different in appearance but all of them are essentially the same: *so far no one has found an example of a set that would be recognized by most mathematicians as* (*semi*)*decidable in the intuitive sense and for which we cannot construct an appropriate Turing machine*. Of course, this assertion should not be understood literally, i.e., as though for every set recognized to be (semi)decidable someone had actually constructed a corresponding machine. In fact, there are numerous tools for indirectly proving the existence of such a machine. What is Church's Thesis for? On the one hand, it can serve as a guiding star: as soon as we have established (semi)decidability in the intuitive sense, our chance of finding the

corresponding Turing machine should be considered very high. In fact, professional mathematicians usually content themselves with establishing intuitive (semi)decidability and do not condescend to formal proofs. On the other hand, Church's Thesis plays a role in mathematics similar to that played elsewhere by the law of conservation of energy. Namely, as long as no exception to the law is found, it is unreasonable to set out to construct a perpetual motion machine. Similarly, once the Turing undecidability of a set has been proved, one need not spend one's time seeking a universal method for recognizing the elements of that set. In particular, according to Church's Thesis, the quite special result (5.7.2) gives us the moral right to cease the hunt (so far carried out in vain) for a "process" of the sort Hilbert asked for in his Tenth Problem>>.] nel quale l'aritmetica rimanga per esempio categoricamente caratterizzata, ed ecco che il teorema diventa allora proprio l'opposto del teorema di completezza: Esistono asserti P che sono veri (validi) nel sistema formale H in considerazione, H $\models$ P, ma che non sono formalmente dimostrabili in H, ovvero H $\nvdash$ P (con tutti i problemi di cui si diceva prima in ordine all'interpretazione del risultato!).

Ci sembra di far cosa opportuna al lettore riportando integralmente l'argomentazione con cui si illustra la questione nel bel libro di Carlo Toffalori e Patrizio Cintioli, *Logica matematica* (un testo che appare ben coniugare l'esigenza di un'esposizione sintetica per "principianti", con quella di un buon livello sia in termini di rigore che di approfondimento).

> Naturalmente, una riflessione sul risultato di incompletezza di Gödel potrebbe generare qualche perplessità a proposito dell'ambito della logica del primo ordine, che è, sì, sufficiente ad esprimere abbastanza bene la matematica importante, ma ha comunque forti limitazioni espressive proprio a riguardo della teoria dei numeri: ad esempio, non sa tradurre quel Principio di induzione che caratterizza la struttura (N,0,succ) a meno di isomorfismi. Rappresentiamo allora l'Aritmetica di Peano in una logica più potente di quella del Primo Ordine e capace di esprimere, appunto, il Principio di induzione, ad esempio la Logica del Secondo Ordine, di cui parleremo nell'Appendice. In questo contesto ampliato, l'Aritmetica di Peano ammette un solo modello a meno di isomorfismi, cioè (N,0,succ). Siccome però la nuova logica estende quella del I ordine, possiamo ancora considerarvi la proposizione di Gödel γ che asserisce la propria indimostrabilità. Se γ fosse dimostrabile nel sistema, allora sarebbe falsa, e si verifica facilmente che questo è impossibile. Ma allora γ non è dimostrabile, e quindi (o tuttavia, a seconda dei punti di vista) è vera nel modello. Nella nuova logica estesa, verità e dimostrabilità non corrispondono più tra di loro; in altre parole, non vale più il Teorema di completezza. Dunque le maggiori potenzialità espressive si possono acquistare solo al prezzo di sacrificare alcune delle buone proprietà del primo ordine.

Il brano che precede merita molta attenzione, in ordine a diversi punti. A parte la facile replica che ciò che sembra "buono" agli autori (che a p. 187 dichiarano esplicitamente essere la logica del I ordine <<la migliore logica possibile>>) può essere "cattivo" per altri, per esempio proprio il teorema di Löwenheim-Skolem che riteniamo essere viceversa all'origine di parecchie note difficoltà di interpretazione, [Val forse la pena di informare che, in virtù di un teorema del logico matematico finlandese Per Lindström ("On estensions of elementary logic", 1969), la logica del I ordine è la sola logica le cui formule sono chiuse per congiunzione, negazione e quantificatore esistenziale (il $\vee$ si può esprimere infatti mediante $\wedge$ e $\neg$, allo stesso modo che $\forall$ si può esprimere mediante $\exists$ e $\neg$), e che soddisfa inoltre il teorema di Löwenheim-Skolem e il teorema di compattezza (il quale afferma che se un sistema formale H con un insieme I di infiniti assiomi è tale che il sistema formale H_X da esso desunto per ogni sottoinsieme finito $X \subset I$ ammette un modello, allora H stesso ammette un modello - in parole più semplici, se H è finitamente "soddisfacibile", allora è soddisfacibile; il teorema in parola è in effetti una semplice conseguenza del teorema di consistenza).] il fatto principale è che la scissione tra "verità" e "dimostrabilità" viene avvertita da quasi tutti i commentatori già quale conseguenza del teorema di incompletezza sintattica. E' usuale infatti presentare la "trovata" di Gödel dicendo che il paradosso del mentitore nella forma <<questa proposizione è falsa>> è un'autentica antinomia, mentre diventa la chiave del famoso teorema quando si enunci nella forma <<questa proposizione è indimostrabile>>. Insomma, sarebbe proprio la scissione tra verità (o falsità) e dimostrabilità (o indimostrabilità) a costituire al tempo stesso la "soluzione" del paradosso, e la necessità di accettazione dell'incompletezza. Possiamo aggiungere un'obiezione più "tecnica". La proposizione γ asserisce in realtà la propria indimostrabilità nel sistema formale H di cui trattasi, perciò, se si estende la logica, ecco allora che sembrerebbe doversi considerare un nuovo sistema formale, passare diciamo da H ad H', sicché non sarà proprio la stessa γ di prima quella che bisognerà adesso prendere in esame, bensì una γ' che asserisca la propria indimostrabilità in H' (e lasciamo da parte la circostanza che l'estensione delle regole della logica potrebbe prevedere anche un'estensione delle regole ammesse per le dimostrazioni). Insomma, la proposizione che serve per concludere nella direzione voluta bisognerebbe a nostro parere ricostruirla *ex novo*, ma se non c'è possibilità di mettere in atto il "gioco" della goedelizzazione - come potrebbe non esserci se si introducono nel nuovo linguaggio tanti "nomi" quanti il continuo, per esempio una variabile per ogni sottoinsieme di *N*, insomma, un "alfabeto" alla base del sistema formale non più sottoposto a restrizioni di cardinalità - ecco allora che la ricercata proposizione γ' potrebbe non essere più costruibile, almeno nello stesso modo suggerito da Gödel.

D - Il paradosso di Carroll

Abbiamo annunciato nel corso della rassegna sui paradossi che esiste almeno un altro paradosso logico degno di nota, che viene però di solito omesso dal relativo elenco. Non compare infatti né nei menzionati testi di Beth e di Mangione, e neppure nella lista di Russell 1908. Per contro, viene citato invece in Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*, 1974 (l'autore, noto logico matematico, tra i pochi che riuscirono ad essere in qualche familiarità con Gödel - superandone la diffidenza di tipo paranoico che lo condusse addirittura alla morte per inedia - nacque in Cina nel 1921, emigrò negli USA nel 1946, e lì sempre sostanzialmente rimase fino alla morte, sopravvenuta nel 1995; studiò ad Harvard, e fu professore sia ad Harvard che presso la Rockefeller University di New York). Si tratta di una sorta di "scherzo" proposto sotto forma di racconto (*Mind*, 4, 14, 1895) da Lewis Carroll, che ci sembra opportuno riportare qui integralmente, anche perché il *regresso all'infinito* che in esso si costruisce sembra in qualche modo potersi ritrovare anche nella dimostrazione di Gödel, come viene discusso nel citato articolo di Di Saverio.

What the Tortoise Said to Achilles

Achilles had overtaken the Tortoise, and had seated himself comfortably on its back.
"So you've got to the end of our race-course?" said the Tortoise. "Even though it does consist of an infinite series of distances? I thought some wiseacre or other had proved that the thing couldn't be done?"
"It *can* be done," said Achilles. "It *has* been done! *Solvitur ambulando*. You see the distances were constantly *diminishing*; and so --"
"But if they had been constantly *increasing*?" the Tortoise interrupted "How then?"
"Then I shouldn't be *here*," Achilles modestly replied; "and you would have got several times round the world, by this time!"
"You flatter me -- *flatten*, I *mean*" said the Tortoise; "for you are a heavy weight, and *no* mistake! Well now, would you like to hear of a race-course, that most people fancy they can get to the end of in two or three steps, while it *really* consists of an infinite number of distances, each one longer than the previous one?"
"Very much indeed!" said the Grecian warrior, as he drew from his helmet (few Grecian warriors possessed *pockets* in those days) an enormous note-book and a pencil. "Proceed! And speak *slowly*, please! *Shorthand* isn't invented yet!"
"That beautiful First Proposition of Euclid!" the Tortoise murmured dreamily. "You admire Euclid?"
"Passionately! So far, at least, as one *can* admire a treatise that won't he published for some centuries to come!"
"Well, now, let's take a little bit of the argument in that First Proposition -- just *two* steps, and the conclusion drawn from them. Kindly enter them in your notebook. And in order to refer to them conveniently, let's call them *A*, *B*, and *Z*: --
(*A*) Things that are equal to the same are equal to each other.
(*B*) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
(*Z*) The two sides of this Triangle are equal to each other.
Readers of Euclid will grant, I suppose, that *Z* follows logically from *A* and *B*, so that any one who accepts *A* and *B* as true, *must* accept *Z* as true?"
"Undoubtedly! The youngest child in a High School -- as soon as High Schools are invented, which will not be till some two thousand years later -- will grant *that.*"
"And if some reader had *not* yet accepted *A* and *B* as true, he might still accept the *sequence* as a *valid* one, I suppose?"
"No doubt such a reader might exist. He might say 'I accept as true the Hypothetical Proposition that, *if A* and *B* be true, *Z* must be true; but, I *don't* accept *A* and *B* as true.' Such a reader would do wisely in abandoning Euclid, and taking to football."
"And might there not *also* he some reader who would say 'I accept *A* and *B* as true, but I *don't* accept the Hypothetical '?"
"Certainly there might. *He*, also, had better take to football."
"And *neither* of these readers," the Tortoise continued, "is *as yet* under any logical necessity to accept *Z* as true?"
"Quite so," Achilles assented.
"Well, now, I want you to consider *me* as a reader of the *second* kind, and to force me, logically, to accept *Z* as true."
"A tortoise playing football would be -- " Achilles was beginning
"-- an anomaly, of course," the Tortoise hastily interrupted. "Don't wander from the point. Let's have *Z* first, and football afterwards!"
"I'm to force you to accept *Z*, am I?" Achilles said musingly. "And your present position is that you accept *A* and *B*, but you don't accept the Hypothetical --"
"Let's call it *C*," said the Tortoise.

"-- but you *don't* accept
(*C*) If *A* and *B* are true, *Z* must be true. "
"That is my present position," said the Tortoise.
"Then I must ask you to accept *C*."
"I'll do so," said the Tortoise, "as soon as you've entered it in that note-book of yours. What else have you got in it?"
"Only a few memoranda," said Achilles, nervously fluttering the leaves: "a few memoranda of -- of the battles in which I have distinguished myself!"
"Plenty of blank leaves, I see!" the Tortoise cheerily remarked. "We shall need them *all*!" (Achilles shuddered.) "Now write as I dictate: --
(*A*) Things that arc equal to the same are equal to each other.
(*B*) The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.
(*C*) If *A* and *B* are true, *Z* must be true.
(*Z*) The two sides of this Triangle are equal to each other."
"You should call it *D*, not *Z*," said Achilles. "It comes *next* to the other three. If you accept *A* and *B* and *C*, you *must* accept *Z*."
"And why *must* I?"
"Because it follows *logically* from them. If *A* and *B* and *C* are true, *Z must* be true. You don't dispute *that*, I imagine?"
"If *A* and *B* and *C* are true, *Z must* he true," the Tortoise thoughtfully repeated. "That's *another* Hypothetical, isn't it? And, if I failed to see its truth, I might accept *A* and *B* and *C*', and *still* not accept *Z*. mightn't I?"
"You might," the candid hero admitted; "though such obtuseness would certainly be phenomenal. Still, the event is *possible*. So I must ask you to grant *one* more Hypothetical."
"Very good. I'm quite willing to grant it, as soon as you've written it down. We will call it
(*D*) If *A* and *B* and *C* are true, *Z* must be true.
"Have you entered that in your notebook?"
"I *have*!" Achilles joyfully exclaimed, as he ran the pencil into its sheath. "And at last we've got to the end of this ideal race-course! Now that you accept *A* and *B* and *C* and *D*, *of course* you accept *Z*."
"Do I?" said the Tortoise innocently. "Let's make that quite clear. I accept *A* and *B* and *C* and *D*. Suppose I *still* refused to accept *Z*?"
"Then Logic would *force* you to do it!" Achilles triumphantly replied. "Logic would tell you 'You can't help yourself. Now that you've accepted *A* and *B* and *C* and *D*, you *must* accept *Z*!' So you've no choice, you see."
"Whatever Logic is good enough to tell me is worth *writing down*," said the Tortoise. "So enter it in your book, please. We will call it
(*E*) If *A* and *B* and *C* and *D* are true, *Z* must be true. Until I've granted *that*, of course I needn't grant *Z*. So it's quite a *necessary* step, you see?"
"I see," said Achilles; and there was a touch of sadness in his tone.
Here narrator, having pressing business at the Bank, was obliged to leave the happy pair, and did not again pass the spot until some months afterwards. When he did so, Achilles was still seated on the back of the much-enduring Tortoise, and was writing in his note-book, which appeared to be nearly full. The Tortoise was saying, "Have you got that last step written down? Unless I've lost count, that makes a thousand and one. There are several millions more to come. And *would* you mind, as a personal favour, considering what a lot of instruction this colloquy of ours will provide for the Logicians of the Nineteenth Century -- *would* you mind adopting a pun that my cousin the Mock-Turtle will then make, and allowing yourself to be re-named *Taught-Us*?"
"As you please!" replied the weary warrior, in the hollow tones of despair, as he buried his face in his hands. "Provided that *you*, for *your* part, will adopt a pun the Mock-Turtle never made, and allow yourself to be re-named *A Kill-Ease*!"

(Da http://www.ditext.com/carroll/tortoise.html, Transcribed into hypertext by Andrew Chrucky, July 10, 1997.)

E - Il teorema di incompletezza ... di Finsler

Nel più volte citato articolo di Dawson si fa a un certo punto menzione di una piccola polemica scoppiata nel 1933 tra il già citato Paul Finsler e Gödel, in ordine a una pretesa priorità del primo sul risultato di incompletezza. Questo sarebbe stato raggiunto dal reclamante in un articolo del 1926, "Formale Beweise und die Entscheidbarkeit" (una cui traduzione inglese è reperibile nel già nominato *From Frege to Gödel...*), e ci sembra quindi di fare ancora una volta cosa opportuna con l'offrire ai lettori un nuovo ampio stralcio da Meschkowski (*loc. cit.*), che discute (almeno in parte) l'argomentazione di Finsler all'inizio del suo Capitolo 11, intitolato appunto "Problemi di decisione". [Aggiungiamo che il capitolo si apre con un'interessante citazione di André Weil (1906-1998, uno dei più grandi matematici del secolo scorso, fratello dell'altrettanto celebre filosofa Simone Weil, fondatore del gruppo Bourbaki, coinvolto nei soliti eventi relativi al II conflitto mondiale, riparò infine negli USA, dove divenne professore a Princeton): <<Dio esiste perché la matematica è non contraddittoria, e il diavolo esiste perché non possiamo dimostrarlo>>.]

> Il tentativo di dimostrare la non contraddittorietà e la completezza di un sistema di assiomi, nel senso del "programma" di Hilbert, conduce ad alcuni "problemi di decisione", dei quali ci vogliamo ora occupare.

La questione dell'esistenza o no di "problemi non decidibili" affiorò già quando Kronecker manifestò la sua critica alla teoria dei numeri irrazionali di Weierstrass. Il volume *Concetti fondamentali della teoria degli insiemi* di Hessenberg, comparso nel 1906, contiene già un intero capitolo intitolato: "Completezza e decidibilità logica". Ivi si dà notizia del fatto che H. A. Schwarz aveva sfidato Kronecker a dare un esempio di problema che si potesse dimostrare essere indecidibile.

Ciò non riuscì a quell'epoca. Nel 1926 Finsler ha ripreso di nuovo la questione.

Egli parte dalla semplice costatazione, di teoria degli insiemi, che non vi può essere più di un "numero numerabile" di dimostrazioni di teoremi matematici. Tutte le dimostrazioni, infatti, vengono condotte con un numero finito di "segni". Intendiamo, con ciò, per "segni" le varie lettere dell'alfabeto e inoltre i simboli necessari per una dimostrazione matematica (=, +, -, ...). L'insieme di tutte le dimostrazioni "possibili" è ora un sottoinsieme (proprio) di un certo insieme numerabile S. Tale insieme S è, semplicemente, l'insieme di tutte le possibili "combinazioni di segni" che la nostra "cassetta tipografica" ammette. A S appartengono naturalmente pure molte "combinazioni di segni" prive di senso; anche, però, tutte le possibili poesie liriche.

Che S sia numerabile risulta subito chiaro, se si ordina questo insieme "lessicograficamente" secondo una qualche regola.

Ricordiamoci adesso che l'insieme di tutti i numeri reali *non* è numerabile (cfr. p. 51). Numerabili sono invece non solo l'insieme dei numeri razionali, ma anche quello dei numeri algebrici. La dimostrazione di questo fatto, già addotta da Cantor, si può trovare in ogni trattato di teoria degli insiemi. Poiché l'insieme di tutti i numeri reali non è numerabile, ciò deve valere anche per l'insieme *T* dei numeri non algebrici, ovvero *trascendenti*. Si consideri ora la proposizione:

α ***è un numero trascendente.***

Per il numero π questa affermazione venne dimostrata vera, come è noto, da Lindemann. La si può dimostrare per ogni numero trascendente α?
Finsler arriva alla seguente conclusione: la dimostrazione non può venire compiuta per tutti i numeri trascendenti, perché l'insieme di tutte le dimostrazioni è numerabile, quello dei numeri trascendenti, invece, ha la potenza del continuo.

Non vogliamo entrare qui nella difficile questione di stabilire quanto delle conclusioni di Gödel siano già presenti nel lavoro in oggetto: ci limitiamo a dire che ci sembra che, se non da un punto di vista strettamente tecnico-specialistico, almeno dal punto di vista del potenziale fascino su un pubblico generico in cerca di sensazioni filosofiche, affermazioni esplicitamente contenute nello scritto di Finsler quali: <<there exist propositions that are not formally decidable>> abbiano in effetti una certa rilevanza. [Aggiungiamo che il teorema di Gödel appare in effetti del tutto "interno" all'aritmetica, senza fare menzione dei numeri reali, ma che bisogna tener conto che i sottoinsiemi dei numeri naturali costituiscono una totalità equipotente a quella dei numeri reali, e che l'infinità continua di asserzioni del tipo "X è un sottoinsieme decidibile di *N*", per ogni $X \subseteq N$, è un perfetto analogo dell'infinità continua delle asserzioni prese in considerazione da Finsler, "α è un numero trascendente".] Il teorema di incompletezza secondo la forma che ne dà il semplice ragionamento di Finsler non appare in definitiva altro che una parafrasi post-cantoriana dell'osservazione aristotelica che distingue i nomi dalle cose, il linguaggio dagli oggetti: questi ultimi, elementi del regno del pensiero, costituiscono un'infinità continua, le dimostrazioni, elementi del regno della parola, un'infinità numerabile, *ergo*, una distanza "trascendente" separa la matematica, intesa come "discorso" umano, dagli enti che essa studia. [Dello stesso tenore ci sembrano sia l'opposizione di Zermelo a Gödel cui abbiamo accennato, ma anche la ripresa di essa da parte di Garrett Birkhoff (1911-1996, figlio del matematico altrettanto noto George, studiò ad Harvard, dove divenne in seguito professore; fu autore, insieme con Saunders Mac Lane, di un trattato di Algebra degno ancora oggi della massima considerazione, *Survey of Modern Algebra*, 1941): <<una tale conclusione dipende naturalmente dal fatto di fissare tutti i metodi di dimostrazione ammissibili [e] quindi ... dovrebbe essere considerata con profondo scetticismo [...] rimane il problema dell'esistenza eventuale di metodi perfettamente "validi" di dimostrazione esclusi dal particolare sistema [di Gödel] [...] [la dimostrazione dell'esistenza di proposizioni indecidibili] risulta tuttavia non costruttiva, e dipende dal fatto di ammettere l'esistenza di un'infinità non numerabile di "proposizioni", e solo un'infinità numerabile di "dimostrazioni" (da Dawson). La citazione dei casi di Zermelo e di Birkhoff ha quanto meno il merito storico di persuadere che l'accettazione del teorema di Gödel fu meno unanime di quanto non si lasci credere, per non dire del fatto che essa fu senz'altro <<fragile>> (potenza dell'"autorevolezza"), e che la maggior parte dei matematici continuò <<a considerare gli enunciati indecidibili dell'aritmetica come costruzioni artificiose interessanti solo per chi era interessato al problema dei fondamenti>>, come ammesso ancora da Dawson.]

Poco oltre Meschkowski torna sulla dicotomia discreto-continuo, che abbiamo visto essere perennemente al centro di tutta questa indagine, asserendo che (sottolineiamo in anticipo la significatività delle considerazioni finali):

> Vogliamo qui ancora accennare a un problema della critica dei fondamenti particolarmente importante, e interessante per tutti i matematici.
All'inizio di questo capitolo abbiamo messo di fronte l'uno all'altro due fatti: che "l'insieme di tutte le possibili dimostrazioni" è numerabile, che l'insieme di tutti i numeri trascendenti ha la potenza

del continuo. Noi possiamo aggiungere che, naturalmente, anche l'insieme di tutti i numeri reali "definibili" è numerabile. Se un numero reale a ci deve essere "*assegnato*", per esempio mediante il suo sviluppo in frazione decimale, allora deve essere dato un procedimento secondo il quale le cifre di a possono essere calcolate. Noi sappiamo che i numeri π ed e sono trascendenti, ma le cifre del loro sviluppo decimale sono "computabili". [In nota l'autore informa che la successione delle cifre di questi due numeri è addirittura riscorsiva primitiva.] Ora, si può vedere facilmente (per esempio attraverso gödelizzazione delle regole di calcolo) che l'insieme di tutti i numeri reali α definibili mediante una regola di calcolo è numerabile. Quando noi, nell'analisi, continuiamo a lavorare con numeri reali "tanti quanti il continuo", procediamo come un viandante che trascina dietro nel suo sacco a spalla bagagli ("della potenza del continuo!") che durante il viaggio certamente non tirerà fuori del sacco. Il problema di un'impostazione "costruttiva" dell'analisi (evitando l'uso illimitato del *tertium non datur*) ha perciò una grande importanza. Ora, il problema non è affatto nuovo, e tutti i tentativi in questa direzione hanno condotto fino adesso a un allungamento dei procedimenti dimostrativi, spesso tormentoso. Se vogliamo restare al nostro paragone, diremo che con il "bagaglio ridotto" occore percorrere cammini essenzialmente più lunghi, o altrimenti si finisce addirittura col non raggiungere più le mète fino ad ora accessibili. Per questo motivo la maggior parte dei matematici continua ad attenersi ai "metodi già provati".

[A proposito di lunghezza insopportabile ed ingiustificata, se non da formalistica pedanteria, il lettore meno informato resterà forse sorpreso nel sapere che la "dimostrazione" che 1+1 è uguale a 2 viene annunciata per la prima volta alla p. 362 del I volume dei monumentali *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead (tre volumi apparsi tra il 1910 e il 1913), e che per vederla infine effettivamente svolta bisogna aspettare ... il II volume. Si può aggiungere che quando le dimostrazioni sono concepite come <<una catena più o meno insipida ed inintellegibile di sillogismi>>, delle verità che esse pretendono di avvalorare sfuggirebbe nella maggior parte dei casi il *quia*, la cui determinazione è al contrario uno degli aspetti maggiormente significativi di tutta l'indagine matematica (facciamo nostra un'osservazione del famoso studioso del calcolo delle probabilità Bruno De Finetti, 1981).]

Contro il complesso di questa argomentazione [Che diremmo, con termine già introdotto, skolemistica, anche se Finsler pare propendere verso un'interpretazione filosofica diversa di siffatte "banalità", come l'opportuna specificazione linguistica, <<not *formally* decidable>>, oggi purtroppo scomparsa dall'uso (sebbene ancora presente nel titolo dell'articolo di Gödel 1931: <<formal unentscheidbare>>), lascia agevolmente presagire.] si possono levare diverse obiezioni. Prima di tutto, ci sembra palesemente falso che la "grandezza" di quei bagagli sia davvero eccessiva per i bisogni del matematico, dal momento che al contrario la utilizziamo ogni volta che "concepiamo" distintamente nella mente l'esistenza di un estremo di un sottoinsieme di numeri reali (o di punti della retta ordinaria), oppure di qualche ente matematico che goda di certe particolari proprietà al di fuori di una determinata collezione numerabile. E' lo stesso Meschkowski che accenna poi a un'altra possibile obiezione specifica al discorso di Finsler, senza però trarne le relative necessarie conseguenze: <<Contro questa argomentazione è ora senza dubbio possibile obiettare [In nota: <<Questa osservazione risale a R. Sprague>>. (Roland Sprague, 1894-1967, matematico berlinese, è noto per le sue ricerche di aritmetica combinatoria, teoria dei giochi, *etc.*.)] che tuttavia sono pensabili procedimenti dimostrativi, che permettano di sbrigare di un sol colpo la dimostrazione della trascendenza per un sottoinsieme di T che ha la potenza del continuo>>. Specifichiamo allora che tale rilievo fa (invero criptico) riferimento ai cosiddetti *numeri di Liouville*, una totalità continua di numeri trascendenti perfettamente "concepibili" (insieme *alla* dimostrazione della loro trascendenza - singolare, una sola dimostrazione valida per tutti!), per cui si veda la nota 9 nel già citato ...aritm-trans.doc.

Ancora a proposito di dimostrazioni per assurdo, in un caso come il presente assai poco convincenti, vorremmo vedere esplicitamente esibito un numero reale la cui trascendenza viene dimostrata essere indecidibile. Un matematico può riuscire secondo noi a dimostrare che un "dato" numero è trascendente, anche se evidentemente non basterà la sua intera vita, né quella dell'umanità (né, si potrebbe pensare, della "divinità", qualora il tempo discreto sia inteso anche come caratteristico della continuità di una "coscienza" infinita), per rispondere a *tutte* le simili domande, e diciamo ciò senza peraltro dimenticare la dianzi menzionata osservazione di Sprague. Abbiamo anche sentito obiettare in tale contesto che tali numeri appunto non possono essere esibiti, perché per farlo dovremmo indicare un procedimento che ne computi le cifre (ma in realtà ciò non ci sembra proprio necessario, un numero reale si può assegnare anche in altri modi), ed ecco che allora quel numero sarebbe *ipso facto* compreso nella classe numerabile di quelli definibili. Uno dei numeri che vorremmo fossero esibiti dovrebbe forse essere allora inteso come una quantità davvero ineffabile (αρρητος), una sorta di araba fenice, parte di una popolazione che comprende esseri in grandissimo numero, ma tali che non se ne può scorgere nessuno, "nominare" nessuno, come il sacro nome di Yahweh. [Il discorso fa pensare anche a talune particelle sub-nucleari che esisterebbero ma che ... non si possono vedere, care a certe speculazioni di tantta demenziale fanta-fisica teorica contemporanea - vedi i punti 21 e 22 in: http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/listafis.htm.]

F - In (parziale) difesa di Hilbert e Russell *etc.*

Nei punti 8 e 8bis di http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/listamat.htm si è discusso di "cattivi maestri", e ci sembra doveroso allora tornare sulla questione in una sede formalmente più "rigorosa" per alcune necessarie precisazioni, capaci anche di spiegare delle palesi contraddizioni tra opinioni intimamente professate da attori della vicenda oggetto della nostra attenzione, e quelle che sono invece andate a costituire le loro "immagini collettive". Tale premessa consente di formulare subito un importante principio storiografico: un giudizio di valore su un qualsiasi personaggio che è entrato a far parte in qualche modo della "storia" è legittimato a riferirsi alla "figura ideale" di quel personaggio, piuttosto che a quella reale (in effetti talora complessa, mutevole nel tempo, quando addirittura non contraddittoria nello stesso tempo). Insomma, va sottinteso che si sta parlando piuttosto dei newtoniani che non di Newton, dei darwinisti che non di Darwin, *etc.*, tanto più che almeno di alcuni esponenti di questi "partiti" si può avere esperienza diretta, ciò che non è quasi mai possibile nel caso dei "padri fondatori" (anche lo studio delle opere - che non può poi che essere quasi sempre parziale, a meno di non essere dei super-specialisti dotati di grandi mezzi per la ricerca - deve ritenersi infatti una conoscenza in qualche misura indiretta).

Cominciamo con il riferire che lo stesso primo attore della nostra storia traeva tutt'altre conclusioni che quelle "scettiche", oggi sicuramente maggioritarie, dai suoi stessi teoremi (ma ciò non basta secondo noi ad "assolverlo", semmai a farcelo concepire come persona più "ambigua" di quanto non si ritenga di solito). Per quanto riguarda le convinzioni filosofiche professate da Gödel si veda per esempio: Luca Umena, "Kurt Gödel: un relativista incompleto" (http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/ep8/ep8-goedel.htm).

Passiamo al caso di Hilbert. Le opinioni sulla matematica del "profeta del formalismo" appaiono in effetti più ragionevoli di quanto certe sue frequentemente citate dichiarazioni inducano a ritenere, anche se pure in questo frangente abbiamo l'impressione di una posizione (soprattutto pubblica) non completamente chiara. Non esitiamo a riconoscere che, nella corrispondenza tra Frege ed Hilbert sui fondamenti della geometria, ci troviamo senz'altro dalla parte del primo, e quindi in netto disaccordo con il secondo, mentre dobbiamo ammettere che appare invece apprezzabile ciò che si testimonia (si veda la già citata nota a p. 299 di "La logica nel ventesimo secolo") dell'atteggiamento di Hilbert secondo Arend Heyting (1898-1980, matematico olandese allievo di Brouwer):

<<Dice Heyting, presentando i due come avversari irriducibili: "Come Brouwer non poteva sopportare di vedere la matematica, questo gioiello prezioso dello spirito, divenire un gioco di segni privo di significato, analogamente era impossibile per Hilbert sacrificare le più belle parti di questo maestoso edificio a una mania di sottigliezza">>.

Hilbert sembra in effetti aver calcato in generale eccessivamente la mano sul "finitismo" proprio per prevenire possibili critiche da parte degli intuizionisti. E' illuminante al riguardo una testimonianza del già citato Paul Isaac Bernays (1888-1977, svizzero nato a Londra, conseguì il dottorato a Göttingen, fu assistente di Zermelo a Zurigo, infine divenne professore a Göttingen dietro raccomandazione di Hilbert, riparò in Svizzera nel 1933 per motivi razziali), riportata in nota alla p. 210 del I volume dei *Collected Works* di Gödel:

<<Bernays told about the "violent arguments" that he and Hilbert would have concerning the foundations of mathematics. Bernays attributed the emotional character of these arguments "to a fundamental 'opposition' (Gegensatz) in Hilbert's feelings about mathematics ... namely his resistance to Kronecker's tendency to restrict mathematical methods ..., particularly set theory [[on the one hand]] ... [[and his]] thought that Kronecker had probably been right ... It became his goal ... to do battle with Kronecker with his own weapons of finiteness>>.

Hilbert era del resto autenticamente preoccupato della possibilità che <<i paradossi avessero dato luogo a una crisi scettica fondamentale che richiedeva urgentemente una refutazione>> (citiamo ancora da Dawson). In effetti sulla sua tomba è inciso addirittura un epitaffio anti-scettico: "Wir müssen wissen, wir werden wissen". Si tratta di parole che furono pronunciate nel corso di una trasmissione radiofonica

(Königsberg, 8 Settembre 1930), a riecheggiare un concetto già espresso parecchi anni prima, e precisamente nel corso della *lectio mirabilis* tenuta a Parigi nel 1900: <<In mathematics there is not *Ignorabimus*>>. Tramite esse ci si oppone, anche nella forma linguistica scelta, al principio: "Wir wissen es nicht und wir werden es niemals wissen" (*ignoramus et ignorabimus*), sostenuto nel 1872 da Emil Du Bois-Reymond durante un convegno scientifico a Lipsia (1818-1896, fisiologo naturalista, fratello del matematico Paul, 1831-1889, professore di analisi a Berlino, noto per esempio per importanti risultati sulle serie di Fourier). [In particolare, secondo E. Du Bois-Reymond, sarebbero sempre rimaste senza risposta: <<die Frage nach dem "Wesen der Materie und der Kraft"; die Frage nach dem "Ursprung der Bewegung"; die Frage "wie Materie denkt">>.]

Terminiamo con il caso di Russel, che può ritenersi invece il "profeta del logicismo", e rimane ai nostri occhi responsabile di affermazioni diciamo quanto meno "leggère" del tipo: <<I think philosophy has suffered four misfortunes in the world's history - Plato, Aristotle, Kant, and Hegel. If they were eliminated, philosophy would have done very well>>. [Russell proponeva per esempio di rifiutare la filosofia dello spazio di Kant sulla base dell'osservazione che, se il grande filosofo prussiano fosse nato tra le montagne della Svizzera anziché nella piatta Königsberg, avrebbe elaborato senz'altro una teoria diversa!] Riportiamo ancora da Dawson un commento (tratto da una lettera a Leon Henkin in data 1° aprile 1963) proprio sul teorema di Gödel:

<<Sono passati cinquanta anni da quando ho lavorato seriamente in logica matematica e l'unico lavoro, quasi, che ho letto da quella data è l'articolo di Gödel. Ho capito naturalmente che il lavoro di Gödel è di importanza fondamentale, ma sono rimasto confuso. Mi ha reso felice del fatto che io non lavorassi più in logica. Se un dato sistema di assiomi porta a una contraddizione, è chiaro che almeno uno degli assiomi deve essere falso. Si applica questo all'aritmetica della scuola elementare, in tal caso possiamo credere a ciò che ci è stato insegnato da bambini? Dobbiamo pensare che 2 + 2 non fa 4, ma 4001? Ovviamente non è questo che si intendeva.
Lei nota che fummo indifferenti ai tentativi di dimostrare che i nostri assiomi non potessero portare a contraddizioni. In questo Gödel dimostrò che ci eravamo sbagliati. Ma io pensavo dovesse essere impossibile dimostrare che un dato sistema di assiomi non porta a una contraddizione, e, per questo motivo, prestai poca attenzione al lavoro di Hilbert. Inoltre, ad eccezione dell'assioma di riducibilità, che ho sempre considerato un ripiego, gli altri nostri assiomi mi sembravano tutti luminosamente autoevidenti. Non vedevo come qualcuno potesse negare, per esempio, che q implica p o q o che q implica q o p.>>

Riportiamo anche l'istruttivo commento di Dawson alle perplessità di Russell:

<<Una strana ambiguità permea la lettera. Russell sta ricordando il suo smarrimento nel momento in cui si familiarizzò con i teoremi di Gödel, o esprime uno stupore che dura ancora? Sta dicendo, in parole povere, che aveva riconosciuto la futilità dello schema di Hilbert per dimostrare la coerenza dell'aritmetica, ma non aveva considerato la possibilità di una dimostrazione rigorosa di questa futilità? Oppure rivela la credenza da parte sua che Gödel avesse in effetti dimostrato che l'aritmetica risultava *in*coerente? Henkin suppose quest'ultima eventualità; in risposta alla pressante richiesta di Russell, cercò di spiegare la portata del secondo teorema di Gödel, sottolineando la distinzione tra incompletezza e incoerenza. Alla fine una copia della lettera di Russel arrivò nelle mani di Gödel, che osservò che "Russell evidentemente interpreta in modo erroneo il mio risultato; tuttavia lo fa in modo molto interessante..." (Gödel ad Abraham Robinson, 2 luglio 1973)>>.

Aggiungiamo infine alcune altre apprezzabili riflessioni di Russell, che ci sembrano interessanti anche perché evidentemente connesse con la nostra tesi che ascrive l'origine di diverse delle posizioni filosofico-politiche con cui ci sentiamo in netto contrasto alla ricerca di una libertà priva di qualsiasi tipo di condizionamento, [Pure verso eventuali "verità di fatto": perfino la storia si può ricostruire secondo il desiderio di chi può, come insegna Eric Arthur Blair, alias George Orwell, nel suo celebre *Nineteen Eighty-Four*, 1949.] all'espressione di una sterminata volontà di potenza (che potremmo definire "demiurgica", e che oggi torna di grande attualità nella "filosofia" del *transhumanism* - vedi http://transhumanism.org).

<<The reality of what is independent of my own will is embodied, for philosophy, in the conception of 'truth'. The truth of my beliefs, in the view of common sense, does not depend, in most cases, upon anything that I can do. It is true that if I believe I shall eat my breakfast tomorrow, my belief, if true, is so partly in virtue of my own future volitions; but if I believe that Caesar was murdered on the Ides of March, what makes my belief true lies wholly outside the power of my will. Philosophies inspired by love of power find this situation unpleasant, and therefore set to work, in various ways, to undermine the commonsense conception of facts as the sources of truth or falsehood in beliefs... This gives freedom to creative fancy, which it liberates from the shackles of the supposed 'real' world.
Pragmatism, in some of its forms, is a power-philosophy. For pragmatism, a belief is 'true' if its consequences are pleasant. Now human beings can make the consequences of a belief pleasant or unpleasant. Belief in the moral superiority of a dictator has pleasanter consequences than disbelief, if you live under his government. Wherever there is effective persecution, the official creed is 'true' in the pragmatist sense. The pragmatist philosophy, therefore, gives to those in power a metaphysical omnipotence which a more pedestrian philosophy would deny to them. I do not suggest that most pragmatists admit the consequences of their philosophy; I say only that they are consequences, and that the pragmatist's attack on the common view of truth is an outcome of love of power, though perhaps more of power over inanimate nature than of power over human beings>>. (Bertrand Russell on Pragmatism, Power, and related issues - Selections of comments of Russell about some philosophies of pragmatism, which sum up his core objections, http://www.sonic.net/~halcomb/Russell_Pragmatism_Power.html.)

\- - - - - - -

(Umberto Bartocci, Perugia, giugno 2005 - L'autore desidera menzionare con gratitudine per la loro cortese attenzione durante la faticosa compilazione di queste pagine: Daniel Coray, Giuseppe Di Saverio, Daniele Mundici, Piergiorgio Odifreddi, Franco Palladino, Francesca Rivetti Barbò, Carlo Toffalori, il compianto amico Sauro Tulipani, Luca Umena, Paolo Zappa, i quali naturalmente sono tutti assolutamente estranei alle convinzioni qui professate.)