# APPUNTI PER UNA LEZIONE-CONFERENZA SUI PARADOSSI IN GENERALE E SUL PARADOSSO DI MONTY HALL IN PARTICOLARE

## 1 - PREAMBOLO

Questo articolo nasce da numerose conversazioni con persone interessate al cosiddetto **paradosso di Monty Hall**, una delle quali mi ha detto di averlo fatto oggetto della propria attenzione da numerosi anni, mentre io debbo dire che sì, ne avevo sentito parlare in precedenza, ma non mi aveva mai interessato in maniera particolare fino a che, pochi mesi fa, mi è capitato un curioso episodio cui voglio qui accennare perché inquadra il problema in maniera più generale (ma anche per mia futura memoria).

Recentemente sono stato purtroppo ricoverato diverse settimane in ospedale, ed un giorno, mentre stavo leggendo "Personaggi e paradossi della matematica" (di David Wells), un infermiere mi ha chiesto quali fossero i più interessanti paradossi. Mi sono accorto così di non essere in grado di rispondere per bene, non trovandone nessuno particolarmente degno di attenzione da parte di una persona "normale" (le sciocchezze di Russell sull'insieme di tutti gli insiemi etc.? qualcuno dei paradossi relativistici? Olbers? più interessanti forse alcuni dei paradossi di Zenone, ma anche quello della tartaruga sarebbe parso un inutile sofisma, poiché tutti sanno che Achille raggiunge la tartaruga con un solo balzo*).

* Il paradosso di ha comunque un certo valore filosofico, che spiego qui:
http://www.cartesio-episteme.net/ep8/ep8-zeno.htm
Notevole spazio a paradossi matematici viene dato nel seguente ampio saggio:
http://www.cartesio-episteme.net/mat/teor-goed.pdf
Il paradosso di Olbers viene affrontato qui:
http://www.cartesio-episteme.net/olbers.html
Alcuni paradossi relativistici (quali il famoso paradosso dei gemelli, vengono discussi nei seguenti scritti:
http://www.cartesio-episteme.net/parad.html
http://www.cartesio-episteme.net/GEMVF.htm
http://www.cartesio-episteme.net/fis/demenz.htm
http://www.cartesio-episteme.net/fis/ehrenfest.pdf
etc. etc.
(basta cercare, con l'apposito motore di ricerca, le parole paradosso, paradossi, o paradox nel mio sito: http://www.cartesio-episteme.net/)
E pensare che a quell'infermiere **non** ho saputo rispondere in maniera decente!

Continuando a pensarci, il "paradosso" probabilistico che dà il titolo al presente scritto mi è sembrato quello maggiormente istruttivo, dal momento che diverse persone, perfino matematici di notevole livello, hanno stentato prima di comprenderne la corretta soluzione, e soprattutto di individuare chiaramente l'errore viceversa contenuto nelle proposte di soluzione errate.

Ciò premesso, mi propongo qui di andare alla scoperta non tanto della "soluzione" formalmente corretta, che si trova in numerosissime pagine *web*** (sorvolo sulle dimostrazioni di tipo ... sperimentale, ovvero simulazioni al *computer* a mio parere assolutamente non necessarie), bensì della natura degli "errori" contenuti nei ragionamenti che conducono a soluzioni difformi da quella corretta, o meglio ancora delle **ragioni psicologiche** (c'è chi le chiama **"illusioni cognitive"**, io preferisco pensare a **"illusioni logiche"**) per cui si sbaglia, e si continua poi a perseverare nell'errore, oppure a ricaderci pur avendo ormai individuato ... la trappola logica che si dovrebbe invece evitare. Curioso infatti che una situazione che è in sostanza un'assoluta banalità dal punto di vista matematico non si riesca a trattare per bene al primo approccio, che si sia anzi indotti a credere assolutamente il contrario del vero. Vedremo in effetti che qualche spazio per l'incertezza rimane, ed infine che si potrebbe rispondere alla domanda chiave, "conviene sempre cambiare?", la risposta giusta potrebbe essere: "SÌ, NO, DIPENDE", che immaginiamo accompagnata dalle note che Puccini scrisse per la risposta che dà Goro a Pinkerton nella sua splendida "Madama Butterfly":
«Il nido nuzïale dov'è?»
«QUI, O LÀ!... SECONDO...».

** Tanto per nominare qualche scritto interessante reperibile in rete, segnaliamo:

https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/12656295/#:~:text=The%20Monty%20Hall%20problem%20(or,deficiency%20in%20dealing%20with%20uncertainty
The psychology of the Monty Hall problem: discovering psychological mechanisms for solving a tenacious brain teaser
Stefan Krauss 1, X T Wang
Abstract
The Monty Hall problem (or three-door problem) is a famous example of a "cognitive illusion," often used to demonstrate people's resistance and deficiency in dealing with uncertainty. The authors formulated the problem using manipulations in 4 cognitive aspects, namely, natural frequencies, mental models, perspective change, and the less-is-more effect. These manipulations combined led to a significant increase in the proportion of correct answers given by novice participants, largely because of the synergy of frequency-based formulation and perspective change (Experiments 1, 2). In a raining study

(Experiment 3) frequency formulation and mental models, but not Bayes's rule training, showed significant positive transfer in solving related problems.
[Sono riuscito a scaricarlo per esempio da qui:
https://www.researchgate.net/publication/10839512_The_Psychology_of_the_Monty_Hall_Problem_Discovering_Psychological_Mechanisms_for_Solving_a_Tenacious_Brain_Teaser/link/5d3d58e34585153e59276b41/download]

Why Humans Fail in Solving the Monty Hall Dilemma: A Systematic Review.
Saenen L, Heyvaert M, Van Dooren W, Schaeken W, Onghena P.
Psychol Belg. 2018 Jun 1;58(1):128-158. doi: 10.5334/pb.274.

Tversky and Kahneman's Cognitive Illusions: Who Can Solve Them, and Why?
Bruckmaier G, Krauss S, Binder K, Hilbert S, Brunner M.
Front Psychol. 2021 Apr 12;12:584689. doi: 10.3389/fpsyg.2021.584689. eCollection 2021.]

UB, Perugia, febbraio 2024

## 2 - IL PROBLEMA SPECIFICO

Scegliamo la seguente come definizione precisa del "gioco" a cui giocheremo, visto che se ne possono pensare parecchie varianti:

*Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host,* ***who knows what's behind the doors****, *opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, "Do you want to pick door No. 2?" Is it to your advantage to switch your choice?*
(https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem)

[Abbiamo evidenziato con il grassetto quello che vedremo essere uno dei punti fondamentali dell'analisi. Tra le numerose varianti che si possono immaginare, c'è infatti quella che il conduttore non sappia cosa c'è dietro le porte, ma soltanto quella scelta dal concorrente, oppure che lo conosca, ma non ne faccia uso, per esempio aprendo tra le due porte rimanenti una scelta a caso, oppure fatta scegliere direttamente dal concorrente. In codesto caso bisognerebbe poi specificare cosa accadrebbe se la seconda porta aperta mostrasse l'auto: varrebbe ancora o no la possibilità di cambiare la prima scelta? oppure adesso il gioco si concluderebbe con la sconfitta del concorrente, ormai sapendosi che la sua scelta iniziale era sbagliata?]

E' ovvio che il gioco proposto prende le mosse dal famoso gioco delle tre carte, che all'autore del presente scritto, nato e vissuta a Roma per molti anni, ricorderà sempre il mercato di Porta Portese, dove la domenica mattina alcuni gruppi di lestofanti lo giocavano - ma lo giocano forse ancora oggi - sperando di cogliere nella rete qualche "pollo" - il quale pollo pensa ingenuamente di poter suonare, ma invece verrà suonato. Osserviamo di sfuggita che l'espediente messo in atto dai membri della combriccola - ovvero, compagnia di bricconi, perché il giocatore non è mai solo, ma ha dei compari, che simulano puntate, vittorie e sconfitte con grande clamore - non è tanto il riuscire a confondere gli astanti con un abile lancio delle 3 carte sul tavolo da gioco, facendo credere che una carta che si trova alla sua sinistra sia stata invero gettata alla sua destra. Proprio no, anzi, alla presenza del pollo esattamente il contrario, perché il malcapitato deve credere che vincerà, mentre un altrettanto abile gioco di mano effettuato **dopo** che lui ha fatto la sua scelta lo lascerà di stucco. Vale a dire, per poter vincere il truffatore dovrà letteralmente **cambiare le carte in tavola***.

[C'è in verità un secondo espediente messo in atto dai lestofanti di cui sopra, quello di mandare tutto all'aria con grida del tipo: la polizia, la polizia, e fuggire via, quando capiscono che il primo non funzionerebbe (evenienza invero rara visto che siamo in presenza di un pollo, e i bricconi hanno l'occhio lungo per queste cose). Mi soffermo su questi dettagli perché la maggior parte della gente con cui ho parlato di tale argomento crede che la sostanza del gioco consista tutta nell'abilità del distributore delle carte di far credere ad una distribuzione anziché ad un'altra, sbagliato.]

* Un espediente che qui nel seguito non contempleremo, supporremo cioè che nessuno degli organizzatori del programma cambierà ... le carte in tavola. Notiamo però sin da ora che non è mai chiaramente esplicitato perché il conduttore proponga la variante che caratterizza il "paradosso": solo per allungare il brodo della trasmissione? per aumentare la *suspense* nel concorrente e negli spettatori? oppure per non pagare il premio proposto, e far così risparmiare qualche costo alla produzione? o anche un po' e un po'? Ne riparleremo.

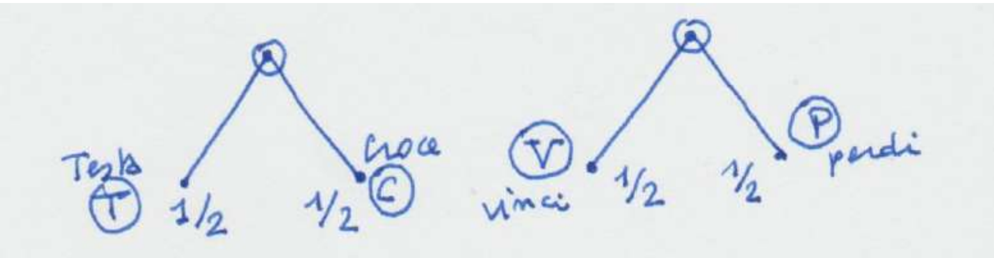
Torniamo adesso al gioco specifico delle tre porte proseguendo prima però con l'analogia concernente il gioco delle tre carte**, analogia che ci darà modo di introdurre facilmente un concetto di probabilità come **scommessa** (proposto dal noto Prof. Bruno De Finetti, che ebbi modo di conoscere abbastanza bene a Roma prima quando ero studente di matematica, e poi da giovane assistente), probabilità inizialmente almeno **non** soggettiva.

** Naturalmente un gioco che si può giocare senza che a condurlo sia un truffatore, e che si può ripetere quante volte si vuole. Un asso, e poi due scartine, per esempio 2 di fiori e 2 di picche, oppure anche due carte "uguali", ossia due 2 di fiori estratti da mazzi diversi. Si dispongono le tre carte coperte sul tavolo, e si chiede: l'asso sta alla tua sinistra (1), al centro (2), alla tua destra 3)?, tutto qui.

E' chiaro che se giochiamo per esempio a testa o croce con una moneta, abbiamo solo due possibili esiti del lancio, preliminarmente ignoti, e che se scommettiamo per esempio 100 Euro che uscirà testa, non possiamo pretendere che in caso di vittoria il nostro antagonista ce ne dia supponiamo 300, né ci accontenteremmo viceversa che ce ne dia solo 50. Facendo questo gioco, è **ragionevole** che se la scommessa è 100, 100 si dobba pagare in caso di perdita, mentre ugualmente 100 si dobba ottenere in caso di vittoria.

**Nota 1** - Se abbiamo a disposizione una certa somma S, e scommettiamo X, consegnando subito X all'allibratore, in caso di perdita ci resterà a disposizione la somma S-X, ossia:
$\Delta(S) = -X$ (**decremento** in caso di perdita)
mentre in caso di vincita dovremo ricevere una quota kX proporzionale ad X dove k vale: $k = 1/p$, p probabilità dell'evento su cui si scommette (probabilità decisa dall'allibratore, ed accettata quindi più o meno dallo scommettitore), dove $0 \leq p \leq 1$, sicché $1 \leq 1/p$ (ed uguale a $\infty$ nel caso limite $p = 0$). Se ne deduce che l'incremento in caso di vincita sarà dato da:
$S \rightarrow S\text{-}X \rightarrow S\text{-}X+kX = S + X(k-1) = S + X(1-p)/p$
$\Delta(S) = X(1-p)/p$ (**incremento** in caso di vincita)
($\Delta(S) = 0$ ses $p = 1$; $\Delta(S) = X$ ses $p = 1/2$).

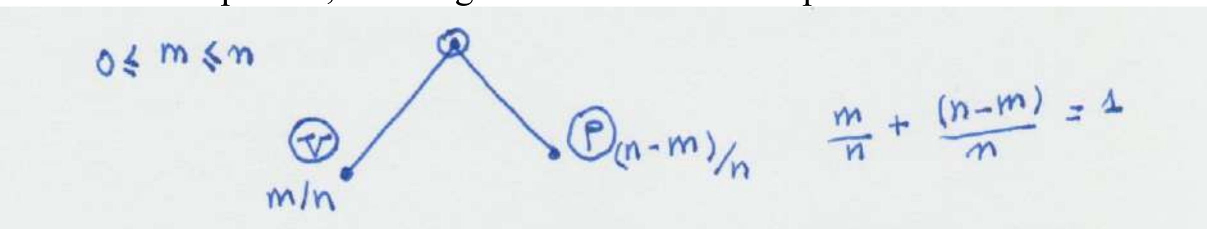
Insomma, il grafo naturale associato alla **situazione****, con la relativa distribuzione di probabilità, non potrà essere altro che la seguente banale dicotomia semplice (rappresentante l'incertezza assoluta, ossia QI = quantità d'informazione = 0, QI ovviamente dello scommettitore), identica in questo caso all'associata dicotomia Vinci/Perdi:



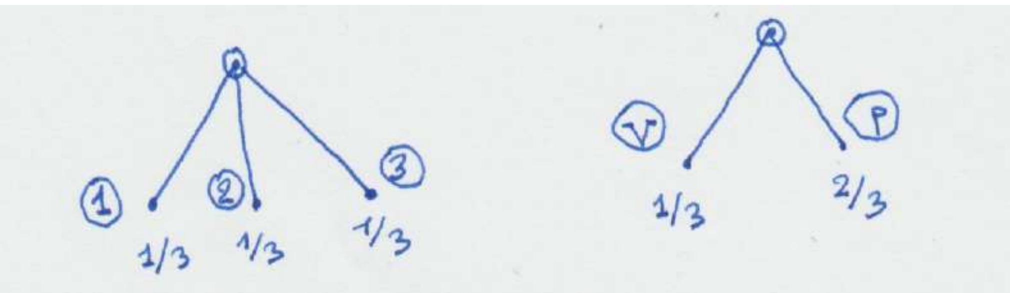

** Si veda per esempio il nostro breve saggio:
http://www.cartesio-episteme.net/probabilita-finale.pdf
http://www.cartesio-episteme.net/probabilita-appendice.pdf

Notiamo anche un ulteriore aspetto della detta assegnazione di probabilità, che potremmo dire **frequentista**. E' ragionevole pure aspettarsi che, se giochiamo per esempio 20 volte di seguito (si specifica sempre, con una moneta ovviamente non truccata), più o meno 10 volte venga testa e più o meno 10 volte

venga croce. Ovvero, se puntiamo sempre su testa 20 volte di seguito, alla fine non avremo né vinto né perso, oppure vinto o perso poco, e nel raggiungimento di questo poco risiederebbe tutta la soddisfazione del giocatore (il quale potrebbe ovviamente essere invece maggiormente soddisfatto lasciandosi guidare nella scelta volta per volta dall'intuito, e sperare quindi in una vincita più consistente - ma anche prevedere una possibile perdita! - ed *a priori* non quantificabile). Altro simile esempio, puntare sul rosso o sul nero alla *roulette*.
In generale, considerando solo probabilità che siano numeri razionali compresi tra 0 e 1, se p = m/n, avremo che in n giocate m saranno le vincite ed n-m ovviamente le perdite, con un grafo Vinci/Perdi del tipo:



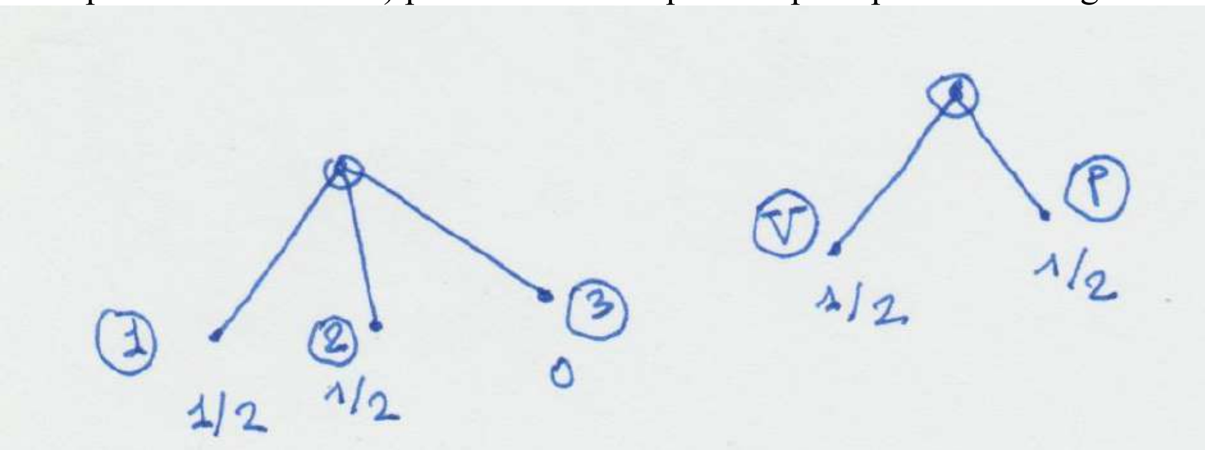

Passiamo adesso al gioco delle tre carte (che si può anche realizzare con un dado, scommettendo sui tre possibili esiti: 1 o 2, 3 o 4, 5 o 6). E' chiaro adesso che (lasciando da parte eventuali abilità manuali o addirittura cambio delle carte in tavola come abbiamo dianzi accennato), se puntiamo ancora 100, non potremo accontentarci in caso di vittoria di ricevere solo 100 Euro, dal momento che è ragionevole ritenere che, nel corso di tre giocate, una sola venga vinta e due vengano perse. Vale a dire che un *fair play* deve contemplare una vincita doppia in caso di vittoria, e che il grafo di cui sopra si trasforma in effetti in una tricotomia altrettanto semplice, esprimente di nuovo l'incertezza assoluta (ossia, QI = 0), alla quale sarà associata un'altrettanto semplice dicotomia del tipo Vinci/Perdi:




Bene, introduciamo adesso nel descritto gioco la **variante di Monty-Hall**. Dopo che il giocatore ha effettuato la sua scelta di dove sia situato l'asso, colui che conduce il gioco (il conduttore), che è al corrente sia della scelta del giocatore sia della disposizione delle tre carte, scopre una delle carte non vincenti, e dice al concorrente: "Questa carta non è vincente, vuoi cambiare la tua scelta iniziale con l'unica carta - diversa dalla tua scelta per prima - rimasta coperta?".

Bisogna ammettere che la prima sensazione è che, dato che rimangono due sole carte coperte, dietro una delle quali c'è sicuramente l'asso, la probabilità di vittoria di queste due carte sia per entrambe 1/2, ossia che i due casi siano

**equiprobabili**. Se per esempio abbiamo scelto 1, ed il conduttore scopre 3, ecco che si potrebbe cadere nella la tentazione di credere che la nostra tricotomia (e la corrispondente dicotomia) passerebbero da quelle sopra riportate alle seguenti:




con conseguente modifica della QI (del giocatore) da 0 a:

$$\frac{3}{2}\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{1}{4}=25\%$$

(si osservi in effetti che sempre di una tricotomia si tratta, ancorché con la presenza di uno 0, e non della dicotomia corrispondente all'incertezza assoluta, 1/2 1/2, che ha invece QI = 0).

L'analisi corretta della situazione deve invece indurre a ritenere che lo stato dell'informazione del giocatore non cambi se il presentatore conosce tanto la distribuzione delle carte quanto la sua scelta, e che quindi ha scoperto il 3 **apposta**, non potendo mai scegliere l'1, ed indicando quindi l'unica carta rimasta non vincente se il giocatore non ha azzeccato la sua prima scelta (l'asso si trova adesso evidentemente al centro), mentre se invece il giocatore avesse azzeccato la sua prima scelta, il conduttore avrebbe avuto due carte da poter scoprire, ossia la 2 o la 3, indifferentemente. Vale a dire, l'**illusione logica** che è il cuore del paradosso, consiste nella risposta (giusta od errata!) alla seguente domanda: dopo la prima rivelazione di una carta non vincente, la probabilità di vittoria del giocatore **con la prima carta scelta** e' aumentata, diminuita, o e' rimasta uguale?

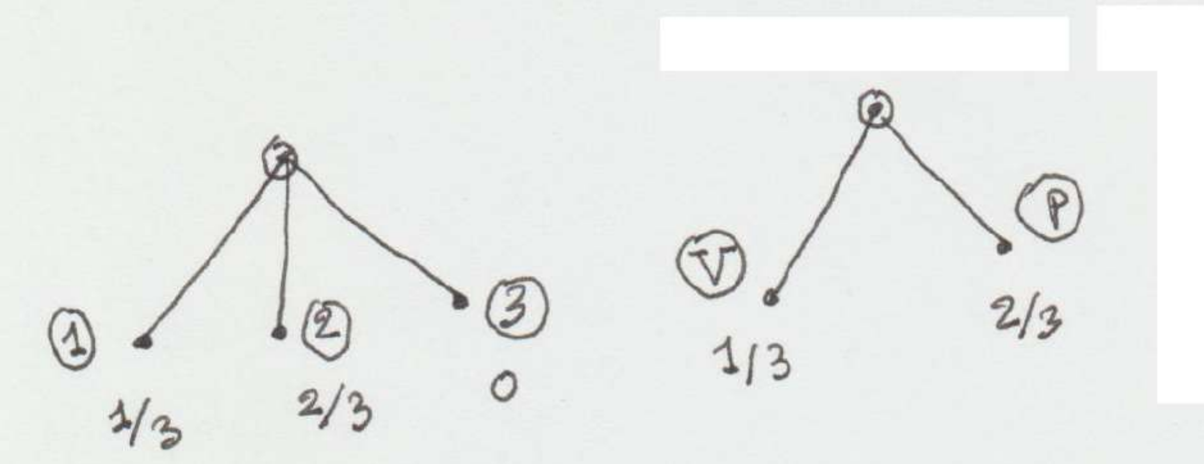
**Nota 2** - Ci sembra che si potrebbe illustrare, a coloro che si avvicinano per la prima volta a questo "paradosso", la natura della detta illusione logica (che si potrebbe definire una sorta di **attrattore epistemologico** - concetto ripreso dall'amico filosofo RVM - ma attrattore **malefico**, visto che pur conoscendo l'analisi corretta della situazione l'intelletto rischia spesso di ricadere nell'analisi errata), ossia di quale sia la risposta giusta alla precedente domanda, con un semplice esempio, in cui il numero delle "porte" diventa molto più grande di 3. Supponiamo di comprare un biglietto di una modesta lotteria di una parrocchia, e che i biglietti venduti siano 100. La probabilità di vittoria (o speranza di vittoria) del nostro biglietto è evidentemente 1/100. Bene, supponiamo che avvenga l'estrazione, e che si sia in attesa che il parroco comunichi quale sia il numero vincente, che lui solo conosce. Può farlo in almeno due modi:

1 - comunicare subito quale sia il numero vincente;

2 - divertirsi a rivelarlo piano piano, per aumentare la *suspense* in coloro che hanno acquistato un biglietto della sua lotteria, per esempio dicendo: 1 non è, 63 non è, 12 non è, 34 non è, etc. (importante che **non** proceda secondo l'ordine naturale, poiché in tal modo arriverebbe prima o poi al numero vincente, e il "divertimento" cesserebbe, ma diciamo a caso), bisognerà arrivare alla 99ma informazione prima di conoscere chi ha vinto.

Orbene, supponiamo che il parroco conosca il numero del biglietto che il parroco di un'altra parrocchia, venuto a trovarlo per l'occasione, ha acquistato (o che gli è stato donato), e che nella sua enumerazione ... complementare non nomini mai a bella posta il numero del suo amico. La precedente domanda diventa adesso: se arriviamo a 50 numeri che non sono vincenti, e il biglietto del secondo parroco ha un numero che non è tra quelli nominati dal primo parroco, la sua probabilità di vittoria e' aumentata (da 1/100 a 1/50), diminuita, o è rimasta uguale? Potrebbe sembrare che sì, è aumentata, siamo passati da 1/100 a 1/50, e invece no, è ovviamente rimasta uguale a 1/100, perché il primo parroco sta comunicando a bella posta numeri che **non** sono vincenti, senza mai nominare il suo, almeno finché non sarà arrivato alla 98ma informazione. Insomma, potrebbe arrivare a leggere ben 98 numeri non vincenti, prima di arrivare finalmente a comunicare chi ha davvero vinto (o dichiarando infine chi ha vinto, o dichiarando il 99mo numero che non ha vinto), lasciando comunque il secondo parroco nell'illusione conclusiva di avere il 50% di possibilità di vittoria.

In conclusione di paragrafo, nel caso che il giocatore abbia scelto 1, un'analisi attenta della situazione dovrebbe condurlo, in luogo dei due grafi precedenti, ai due seguenti:




con conseguente modifica della QI (del giocatore) da 0 a:

$$\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{1}{3}=33{,}33\,\%$$

Alla proposta del conduttore, se vuole cambiare la sua prima scelta, dovrebbe quindi rispondere decisamente di sì, in quanto le sue probabilità di vittoria addirittura raddoppierebbero, e questo potrebbe essere tutto.

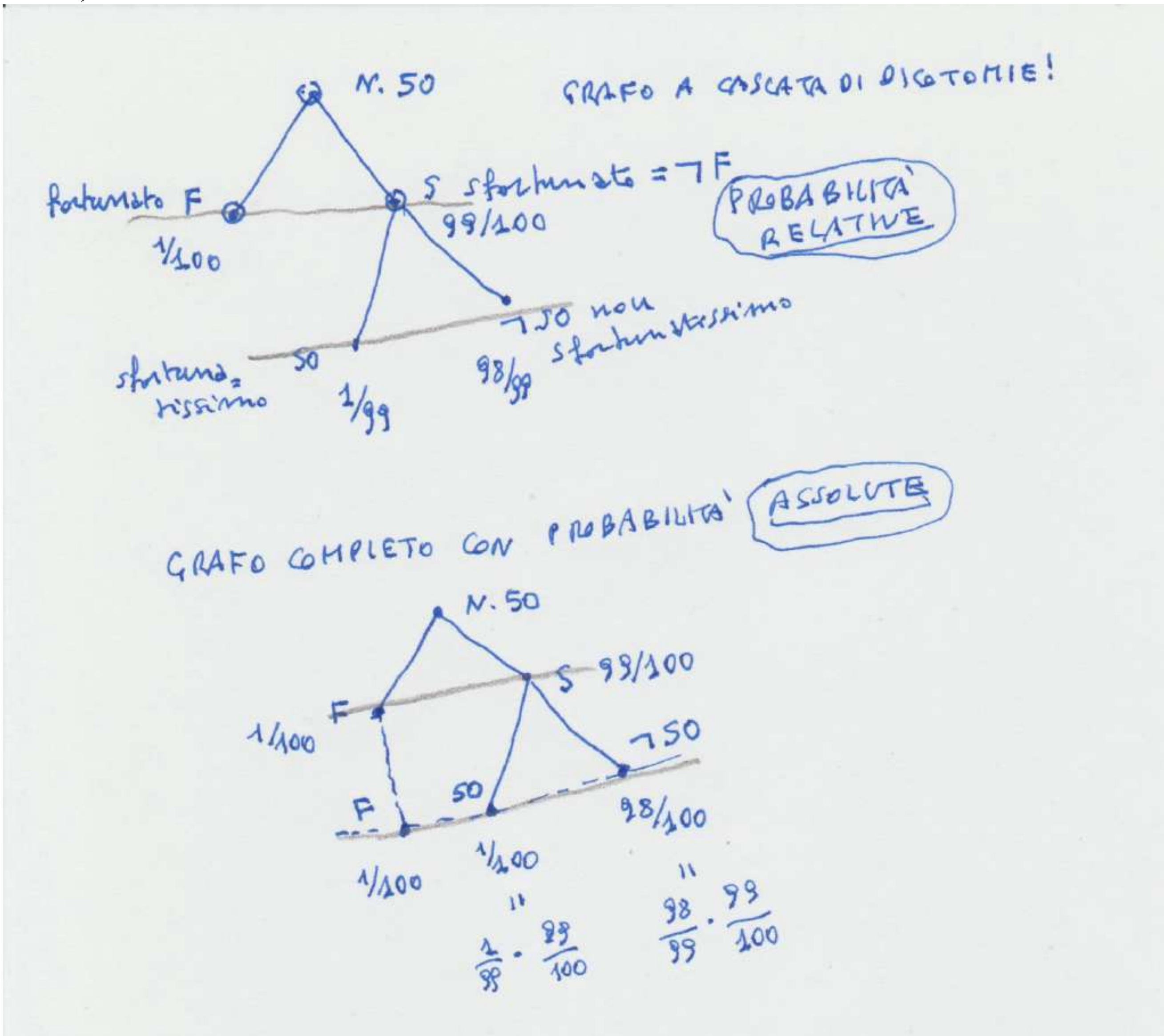
**Nota 3** - Con quella variante del cambio di scelta che deve essere sempre proposta al giocatore, sia che abbia azzeccato all'inizio la carta vincente sia che non l'abbia azzeccata, il gioco in realtà è diventato ... il suo **complementare** (osservazione ricevuta da MC). Vale a dire, si vince se si indica una carta che non è l'asso, ma una delle due scartine, e si perde se si indica l'asso. E' chiaro che non siamo adesso né nel gioco delle tre carte, con tricotomia 1/3 1/3 1/3 e dicotomia Vinci/Perdi 1/3 2/3, ma neppure nel gioco della testa o croce, con dicotomia 1/2 1/2 ed identica dicotomia Vinci/Perdi. La dicotomia Vinci/Perdi associata a questo gioco complementare del gioco delle tre carte è quella dianzi riportata con lo scambio però dei due valori 1/ 2/3, ossia pr(V) = 2/3 pr(P) = 1/3, con conseguente necessaria variazione del valore della possibile vincita. Quando si vince nel primo gioco, si deve ottenere il triplo della posta, ossia si vince il doppio della posta ((1-p)/p = 2 ses p = 1/3), mentre quando si vince nel secondo si deve ottenere 1,5 volte la posta, e vincere quindi solo la metà della posta:
(1-p)/p = 1/2 ses p = 2/3. Val forse la pena di osservare inoltre che il grafo che descrive quello che abbiamo chiamato il "gioco complementare" rimane invariato, ossia cambia solo l'associata dicotomia Vinci/Perdi. Bisogna rendersi conto infatti che le relative probabilità su riferiscono unicamente alla possibile estrazione, o scelta, di un dato numero in un dato insieme, e non alla sua probabilità di ... vittoria, si pensi per esempio al caso in cui il numero estratto

corrisponda a quello corrispondente ad un dato soldato nel corso di una decimazione, difficile in tale caso parlare di "numero vincente", o di "vittoria" - un ulteriore caso in cui *le language est source de malentendus* (Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince).*

## 3 - QUALCHE COMMENTO E QUALCHE ... COMPLICAZIONE

Data la precedente analisi, si potrebbe concludere che sia universalmente valido, di fronte ad una situazione quale quella dianzi descritta, accettare comunque di **cambiare la scelta iniziale** onde avere maggiori probabilità di vincita, ed *amen*. Ma tale risposta ha proprio valenza così universale? Non c'è forse qualche aspetto della questione, **psicologico** oppure **"pratico"**, che abbiamo trascurato? Nell'Appendice b illustreremo un tipo di gioco ispirato a Monty Hall (una sua generalizzazione al caso 9), in cui tutti i giocatori seguono la strategia corretta, e alla fine ... perdono tutti. Rimanendo ancora nello spirito di Monty Hall, proponiamo adesso di divertirci introducendo una siffatta variante nella storia della parrocchia e della lotteria (vedi la precedente Nota 2). Supponiamo infatti di essere arrivati al momento in cui il parroco ha nominato 98 numeri non vincenti, scelti a caso tra i 100 con l'esclusione però del numero vincente, quindi 99. Tanto per essere più precisi, ipotizziamo che il parroco abbia agito così. Estrae un primo numero tra i 100 che sarà il numero vincente, il numero **fortunato**, che aveva probabilità di uscita 1/100, mentre gli altri 99 si tramutano adesso e subito in **sfortunati** (la probabilità iniziale che il nostro fosse un numero sfortunato era evidentemente 99/100). Tra questi 99 numeri sfortunati il parroco procede ad una **seconda** estrazione di un numero che diremo **sfortunatissimo**, uno dei due che il parroco volutamente non nominerà mai nel corso delle sue prime 98 comunicazioni. Supponiamo ora che noi si possegga uno dei due numeri rimasti esclusi, diciamo il N. 50, mentre l'altro numero finora escluso nella lunga elencazione del parroco sia il N. 77. A questo punto il parroco chiede al pubblico che i possessori dei biglietti con questi due numeri si facciano avanti, e noi andiamo dinanzi a lui ed al microfono insieme all'altro frequentatore della parrocchia, quello che possiede il biglietto N. 77. Il parroco pone adesso la domanda fatidica ai due: "vorreste cambiare il vostro biglietto tra di voi, cioè chi ha il 50 prende il 77, e viceversa?". Cosa dovremmo rispondere? In conformità all'analisi precedentemente effettuata, la probabilità di vittoria del numero che possediamo è rimasta invariata, 1/100, mentre quella dell'altro biglietto è aumentata con il passare del tempo, arrivando addirittura a 99/100 (ovviamente, **per noi**, per la nostra probabilità; non si dimentichi mai che la probabilità è sempre relativa e dipendente dallo stato dell'informazione di un dato osservatore) sicché passare da 1/100 a 99/100 è di sicuro conveniente per noi. La situazione è perfettamente simmetrica, sicché pure il N. 77 accetta di cambiare, così al posto del biglietto N. 50 ci ritroviamo con il biglietto N. 77, e viceversa. Lo stesso ragionamento lo fa il possessore del numero 77, con la conclusione che, cambiando biglietto, chi avrebbe vinto si trova ad aver perso, e viceversa.

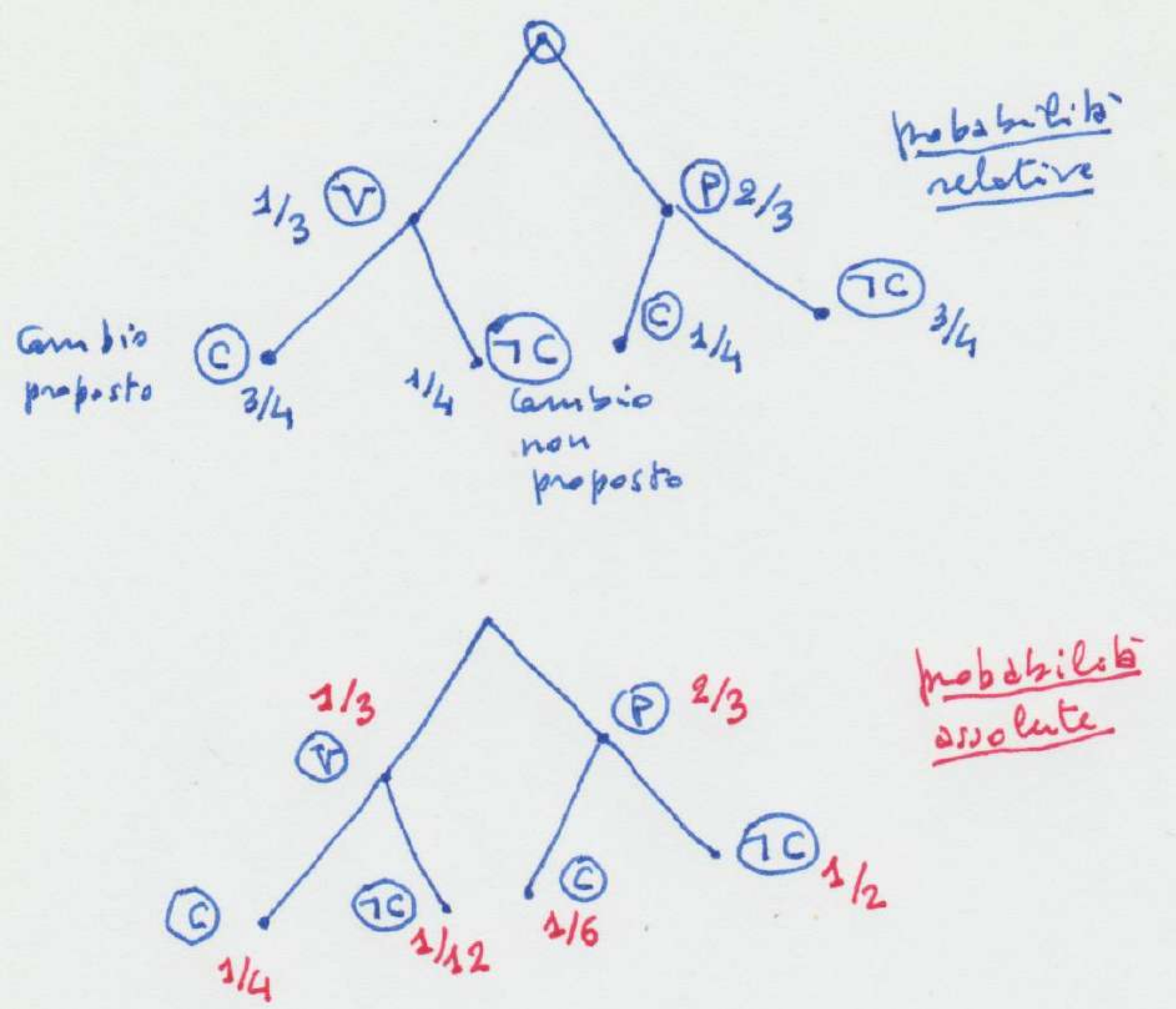
Potremmo chiederci adesso se, sotto un profilo puramente **psicologico**, non debba essere parecchio contrariato chi ha ceduto il numero vincente in cambio del numero perdente, tanto più che un diverso ragionamento avrebbe potuto persuaderlo a **non cambiare**. Sarebbe legittimo infatti domandarsi (entrambi gli aspiranti vincitori potrebbero domandarsi), indovinando la strategia di comunicazione del parroco: il N. 50 non è stato finora menzionato perché è il numero fortunato, o perché è il numero sfortunatissimo? (ovviamente, solo il parroco, che è in possesso di un'informazione completa, QI = 100%, è in grado di rispondere precisamente a questa domanda **in questo momento**). Che il nostro numero 50 sia proprio il numero sfortunatissimo ha **adesso** probabilità 1/100, che sia il numero vincente ancora 1/100:




A seguito di questo calcolo, saremmo costretti a concludere che la probabilità che il nostro sia il numero sfortunatissimo è uguale a quella che sia il numero vincente. **Quindi perché cambiare?** Insomma, quale delle precedenti due analisi matematiche dovremmo privilegiare al fine di prendere una decisione razionale? E' proprio universalmente vero il principio guida che si può riassumere nelle parole: **vince chi cambia**? Mah...

Rimaniamo adesso nell'ambito psicologico, affrontando una questione fin qui rimandata, vale a dire quella delle presumibili **finalità** del conduttore. Solo allungare il brodo e la *suspense*, come abbiamo già detto nella nota * nel paragrafo 2, oppure anche contenere le spese della produzione, ovvero sperare che ci siano poche auto assegnate? Appare infatti chiaro che il "gioco" precisamente definito all'inizio del precedente paragrafo **non** è conveniente per i produttori del programma: infatti, una volta capito il trucco, i concorrenti accetterebbero sempre di cambiare e due concorrenti ogni tre se ne andrebbero via contenti con l'auto. Possiamo quindi ragionevolmente ritenere che questo gioco non sia stato effettivamente proposto che poche volte, o addirittura una soltanto, non abbiamo trovato informazioni "storiche" al riguardo. Se però ci trovassimo **per la prima volta** davanti alla proposta di cambiare la nostra scelta iniziale, e **non** fossimo stati preliminarmente informati che il conduttore ci avrebbe **comunque** proposto di cambiare, sia che avessimo effettuato la scelta vincente, sia quella perdente, non avremmo tutto il diritto di supporre che il conduttore ci voglia attirare in un tranello? Ovvero chiederci di cambiare unicamente perché abbiamo effettuato la scelta vincente? Come dire che, almeno la prima volta, non è così evidente che la matematica suggerisca la decisione giusta da prendere, e che, se invece il gioco si ripete tante volte di seguito, a volte proponendo di cambiare, e a volte no, al fine di poter prendere la decisione più razionale dovremmo conoscere con quale **frequenza** la produzione accetta di concedere il premio. Non è credibile infatti che gli organizzatori del programma adottino **sempre** la strategia di proporre il cambio quando la prima scelta è quella giusta, mentre viceversa non potrebbero sempre non proporlo quando la prima scelta è sbagliata, poiché il pubblico si accorgerebbe prima o poi dell'espediente. Insomma, al fine di decidere nel modo migliore possibile, nel caso in cui a volte si proponga di cambiare, **e a volte no**, dovremmo sapere quale prezzo è disposta a pagare la produzione onde mantenere la trasmissione costantemente oggetto di interesse.

Tanto per fare un esempio, supponiamo che la produzione decida di poter concedere il premio circa una volta su quattro, sicché la proposta di cambiare avviene spesso (ma non sempre) quando il concorrente ha fatto la scelta giusta, mentre non avviene altrettanto spesso quando ha fatto quella sbagliata, comunque qualche volta sì. Il seguente grafo illustra la situazione cui abbiamo così brevemente accennato.




Dal grafo si deduce che, quando ci si propone il cambio, è più probabile che abbiamo vinto che non abbiamo perso,1/4 > 1/6, e che se si fa la scelta sbagliata, la proposta di cambiare avviene solamente una volta su 6, mentre il 50% delle volte non si verifica.

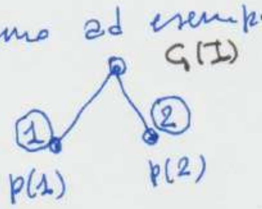
## 4 - APPENDICE A - GRAFI "INVERSI", FORMULA DI BAYES, APPLICAZIONE AL PARADOSSO DI MONTY HALL

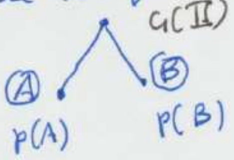
## 5 - APPENDICE B - (IL GIOCO DEI PACCHI)

## APPENDICE A   MONTY HALL E FORMULA DI BAYES   1

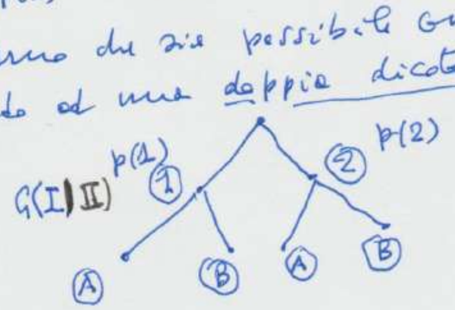
È frequente imbattersi in spiegazioni del paradosso di MH le quali fanno ricorso al cosiddetto Teorema di Bayes sulle probabilità condizionate, sicché ci sembra opportuno dedicare a questo argomento un po' di attenzione.

Prendiamo ad esempio due semplici dicotomie, con le associate probabilità.




Supponiamo che sia possibile combinarle insieme, pervenendo ad una doppia dicotomia del tipo:




pensiamo ad esempio a due caratteri di individui di una medesima popolazione $X$, il cui numero cardinale (finito) indicheremo con $|X|$.

Le probabilità, prima di tutto relative al secondo livello di G(I) dipenderanno dalle relazioni tra le due dicotomie esemplari. Dette esse rispettivamente

$\underbrace{p(A|1),\ p(B|1)}_{\text{somma}=1},\ \underbrace{p(A|2),\ p(B|2)}_{\text{somma}=1}$, siano detti $X_1$, $X_2$, $X_A$, $X_B$ i sottoinsiemi di $X$ corrispondenti ai detti due caratteri:

$$p(1) = |X_1|/|X|,\quad p(2) = |X_2|/|X|,\quad p(A) = |X_A|/|X|,\quad p_B = |X_B|/|X|$$

$$p(A|1) = \frac{|X_A \cap X_1|}{|X_1|},\quad p(A|2) = \frac{|X_A \cap X_2|}{|X_2|},\quad p(A|3) = \frac{|X_A \cap X_3|}{|X_3|}$$

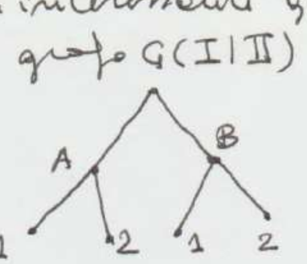
dal che le corrispondenti probabilità assolute, che diremo rispettivamente $\pi(A|1)$, $\pi(A|2)$, $\pi(A|3)$:

$$\pi(A|1) = p(A|1)\,p(1),\quad \pi(A|2) = p(A|2)\,p(2),\quad \pi(A|3) = p(A|3)\,p(3)$$

$$\pi(A|1) = p(A|1)\frac{|X_1|}{|X|} = \frac{|X_A \cap X_1|}{|X_1|} \cdot \frac{|X_1|}{|X|} = \frac{|X_A \cap X_1|}{|X|} \text{ etc.}$$

(2)

La situazione diventa interessante quando si vuole <u>invertire</u> il grafo $G(\mathrm{I}|\mathrm{II})$ e ottenere il grafo $G(\mathrm{II}|\mathrm{I})$:




Quali probabilità assegnare ai vertici di questo grafo a partire da quelle note in $G(\mathrm{I}|\mathrm{II})$? (a partire dalle stesse $p(A)$, $p(B)$).

Se si vuole $p(1|A)$, ma sarà data da $\dfrac{|X_1 \cap X_A|}{|X_A|}$,

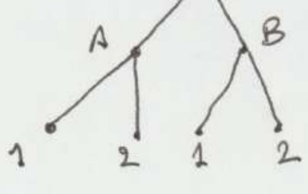
e quindi: $$p(1|A) = \frac{|X_1 \cap X_A|}{|X_A|} = \frac{|X_A \cap X_1|}{p(A)\,|X|} = \frac{1}{p(A)} \frac{|X_A \cap X_1|}{|X|} = \frac{1}{p(A)}\pi(A|1) = \frac{1}{p(A)} \cdot p(A|1)\,p(1)$$

ossia $$p(1|A)\,p(A) = p(A|1)\,p(1)$$ che è la <u>celebre formula di Bayes</u>
$$\pi(1|A) = \pi(A|1)$$

Quanto invece a $p(A)$ e $p(B)$, poiché abbiamo a che fare con bipartizioni, sarà
$$|X| = |X_1| + |X_2| = |X_A| + |X_B| \text{ etc.}$$
$$|X_A| = |X_A \cap X_1| + |X_A \cap X_2| \text{ etc.}$$
d'onde $$\frac{|X_A|}{|X|} = p(A) = \frac{|X_A \cap X_1|}{|X|} + \frac{|X_A \cap X_2|}{|X|} = \pi(A|1) + \pi(A|2)$$

si indica $p(A) = \pi(A)$ ovviamente

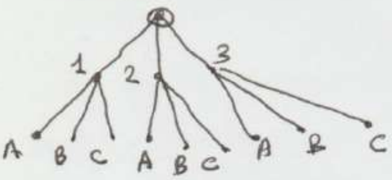
(che viene chiamato pomposamente <u>teorema delle probabilità totali</u>). Se ne conclude che $G(\mathrm{II}|\mathrm{I})$ sarà dotato delle seguenti <u>probabilità assolute</u>:



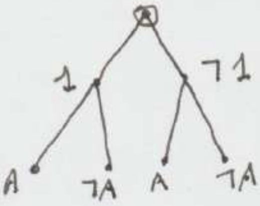

$p(A) = \pi(A) = \pi(A|1) + \pi(A|2) =$
$= p(A|1)\,p(1) + p(A|2)\,p(2)$
idem per $p(B)$: $p(B) = \pi(B) = \pi(B|1) +$ etc.
mentre $\pi(1|A) = \pi(A|1)$, $\pi(2|A) = \pi(A|2)$ etc.

(3)

Nota Abbiamo dimostrato il teorema di Bayes nel caso di una doppia dicotomia, ma è chiaro che ad essa si può ridurre qualsiasi altra simile situazione, passando per esempio da una doppia tricotomia

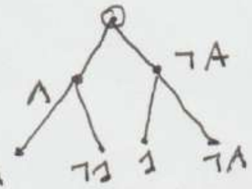



ad una serie di doppie dicotomie del tipo:




nel etc.

e quindi nel caso precedente

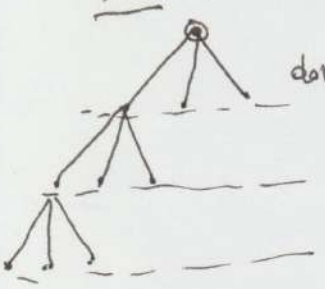



grafo inverso del precedente

$\pi(A|1) = \pi(1|A)$ etc.

---

Analizziamo adesso quanto discussi analizzati al caso di Monty Hall, semplificando il grafo vero che descrive la situazione:



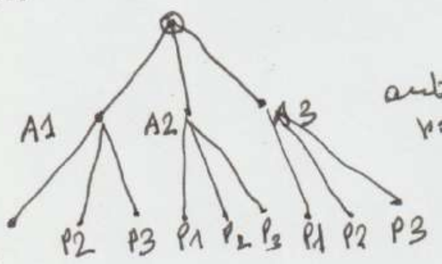
dove si trova l'auto I livello

la scelta del concorrente

la porta che si apre

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$ vertici

con il più semplice:

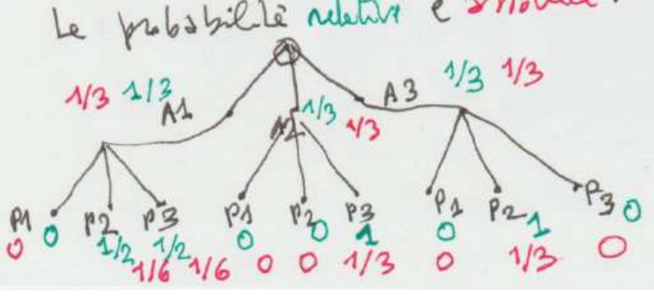



auto dietro le porte 1, 2, 3

porta che viene aperta dal conduttore

che descrive la situazione nel caso che il concorrente abbia effettuato per esempio la SCELTA 1, il che comporta la scomparsa del secondo livello presente nel precedente grafo completo.

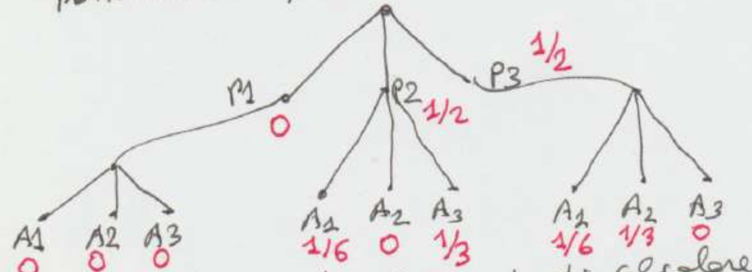
Le probabilità relative e assolute:




somma = 1 !

(4)

Il gioco adesso diventa: il concorrente ha scelto la P1, il conduttore apre P3.
Cosa conviene fare al concorrente, cambiare la sua prima scelta oppure no?
Si tratta di invertire le precedenti [illegible] passando a queste




Volendo, le prob.tà relative, che adesso non ci servono.

dalle quali siamo adesso in grado di calcolare subito le corrispondenti probabilità assolute.

$$p(P1) = \pi(P1) = \pi(P1|A1) + \pi(P1|A2) + \pi(P_1|A3) =$$
$$= 0 + 0 + 0$$
$$p(P2) = \tfrac{1}{6} + 0 + \tfrac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$p(P_3) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} + 0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\pi(A1|P1) = \pi(P1|A1), \quad \pi(A1|P_2) = \pi(P2|A1) \text{ etc.}$$

IN CONCLUSIONE, SE IL CONCORRENTE HA SCELTO LA PORTA 1, ED IL CONDUTTORE APRE LA PORTA 3 (prob.tà = 1/2), LA PROB.TÀ CHE L'AUTO SIA DIETRO LA PORTA 1 È 1/6, MENTRE QUELLA CHE SIA DIETRO LA PORTA 2 È 1/3, OSSIA IL DOPPIO, CONVIENE QUINDI CAMBIARE!

NOTA – Qualcuno ha subito chiesto: perché adesso viene $1/6 < 1/3$, invece della fatidica $1/3 < 2/3$? Perché la porta 3 ha prob.tà 1/2, altrettanto per la 2, quindi in totale: $1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3 < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

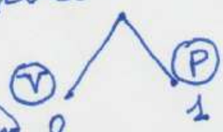
## A CHE GIOCO GIOCHIAMO?

**APPENDICE B**

1

Il presentatore (o conduttore) sceglie il 2, numero vincente.
Il concorrente sceglie il 7, numero perdente.
Il grafo vinci/perdi del conduttore è una dicotomia semplice:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 pres | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 conc. | 8 | 9 |




0 1

che rimarrà invariata per quasi tutto il resto del "gioco"

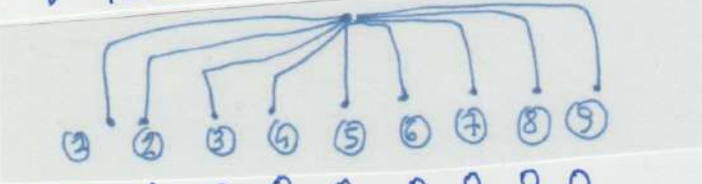
OVVERO, IL CONDUTTORE HA INFORMAZIONE PERFETTA

e analogo per il concorrente sarà ADESSO: (tempo $t_0$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 pres | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 conc. | 8 | 9 |


1/9 8/9

Più esattamente, il conduttore sarà di fronte ad una 9-tomia semplice (che rimarrà invariata per quasi tutto il resto del "gioco"):




0 1 0 0 0 0 0 0 0

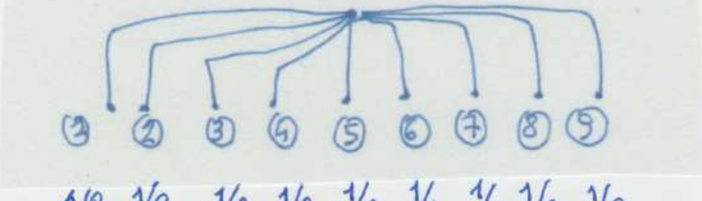
$QI$ = quantità d'informazione =

$$= \frac{9}{8}\left[\left(0-\frac{1}{9}\right)^2+\left(1-\frac{1}{9}\right)^2+\left(0-\frac{1}{9}\right)^2+ecc.\right] =$$

$$= \frac{9}{8}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+7\left(\frac{1}{9}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{9}{8}\left[8\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2\right] = \frac{1}{9}+\frac{8}{9} = 100\%$$

mentre il concorrente avrà:

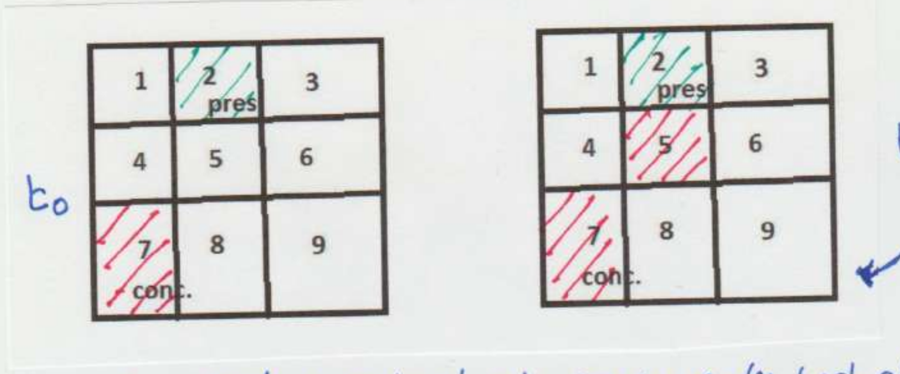



1/9 1/9 1/9 1/9 1/9 1/9 1/9 1/9 1/9

$$QI = \frac{9}{8}\left[\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)^2+ecc.\right]=0$$

Eccoci dunque all'inizio (e non alla fine!) del gioco.

(2)




$t_0$

$t_1$ descrizione (dal punto di vista del presentatore)

Invece di rivelare subito al concorrente (ed al pubblico che assiste, che conosce la scelta del concorrente ma non quella del conduttore) quale sia il numero vincente, il conduttore decide di procedere per esclusione, e comunica che il numero vincente non è ad esempio il 5 (ricordiamo che lui ha informazione perfetta, quindi non nominerà né il 2 né il 7).

PER QUALE FINALITÀ? SOLO PER ALLUNGARE IL BRODO, O ANCHE PER NON PAGARE IL PREMIO?

Rimasti invariati i due grafi del conduttore, quali saranno adesso (tempo $t_1$) quelli del concorrente?


Rimarrà ovviamente invariato, perché la scelta del conduttore di rivelare lentamente l'esito del gioco non cambia quello che è stato già determinato con la scelta effettuata dal concorrente. La sua n-somma diventerà di conseguenza:

SE L'AVESSI SAPUTO PRIMA!

$\boxed{\text{Per } \forall n \geq 3:}$

$\boxed{(n-1)/n(n-2)}$


8/63 8/63 8/63 8/63 0 8/63 1/9 8/63 8/63

(somma = 1)

Sul 5 diventa ovviamente 0, sul 7 che è il numero da lui scelto resta 1/9, mentre i restanti 8/9 vanno divisi tra i 7 vertici rimanenti, ossia $\frac{1}{7}\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{8}{63}$

Insomma, lo stato dell'informazione del concorrente non cambia per il 7, ma cambia per tutti gli altri numeri, $QI = \frac{9}{8}\left[\left(\frac{8}{63}-\frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(0-\frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{63}-\frac{1}{9}\right)^2 + \dots\right] =$

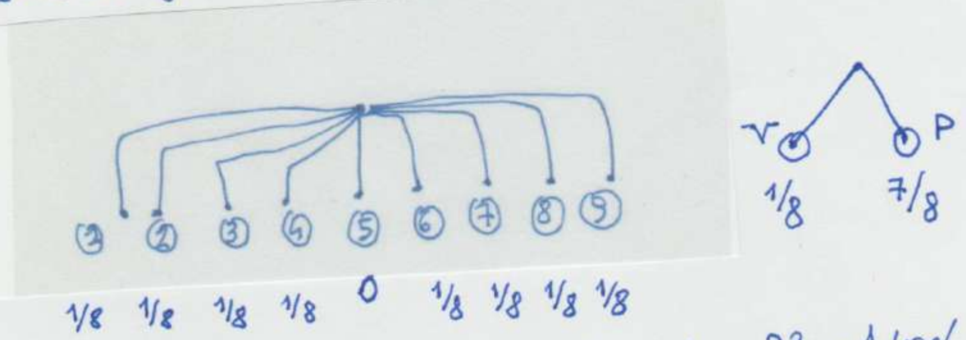
$1739/129654 = 1{,}34/100$ molto scarsa (SALVO ERRORI!)

(3)

Il calcolo precedente costituisce il punto cruciale del paradosso. A seguito di questa prima rivelazione del conduttore, la probabilità che il numero vincente sia 7 è aumentata, rimasta uguale, o diminuita?

La prima illusione (o trappola) è quantitativa, poiché si sarebbe portati a dire che $P(7) = 1/8$, e ciò sarebbe corretto se avessimo saputo che il 5 non è un numero vincente prima di effettuare la scelta, e non dopo.

Appare quindi qui l'aspetto di un'illusione temporale (paradossi alla ... Terminator), che diventa una sorta di ATTRATTORE MALEFICO, poiché pure chi ha capito la situazione è tentato di scrivere:

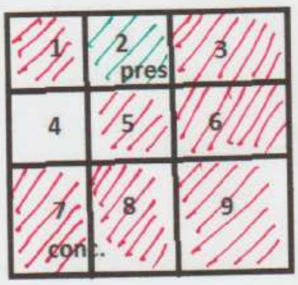



$$9I = \frac{9}{8}\left[8\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{9}\right)^2\right] = \frac{1}{576} + \frac{1}{81} = \frac{73}{5184} = 1,40\%$$

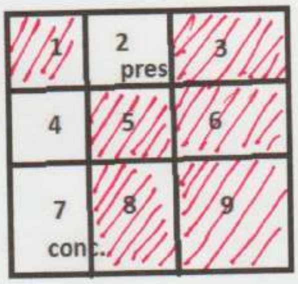
una percentuale poco migliore di quella di prima.

E il conduttore può andare avanti, informando successivamente che il numero vincente non è il 3, o il 9, o l'1, o il 6, o l'8.

per $t_2$ $(n-1)/n(n-3)$ etc. $t_6 = (n-1)/n(n-7)$




tempo $t_6$

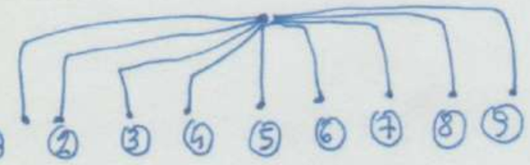



A sx le informazioni del conduttore, a dx quelle del concorrente (che nulla sa di nuovo e dunque nulla sul 4.)

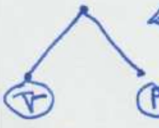
A questo punto il concorrente si trova nella seguente situazione (mentre per il presentatore nulla è cambiato e nulla cambierà):

$t_6$

$\frac{8}{9\cdot 2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$




0 4/9 0 4/9 0 0 1/9 0 0




1/9 8/9

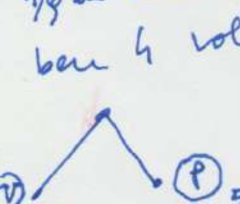
← grafo invariato!

$$9I = \frac{9}{8}\left[6\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{9}{8}\left[6\cdot\frac{1}{9^2} + 18\cdot\frac{1}{9^2}\right] = \frac{9}{8}\,\frac{24}{9^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 33{,}3\% .$$

Mancherebbe poco per svelare il finale del gioco, informare che il 4 non è vincente, e poi lasciare un po' di suspense tra il 2 e il 7, fino a comunicare finalmente che vince il 2 e il 7 perde. Ma no, adesso si cambia gioco che non è quindi uno, ma almeno due (illusione linguistica, relativa così alla definizione (preliminare) del gioco).

Il conduttore chiede al concorrente: vuoi cambiare la tua scelta iniziale? Certo che sì, visto che il 7 scelto all'inizio ha adesso sempre la stessa probabilità di conseguenza 1/9 di essere vincente, mentre il 2 e il 4 ne hanno 4/9, cioè ciascuno ben 4 volte 1/9. La sua dicotomia V/P diventa:




4/9 5/9 .

Tanto per continuare a giocare, diciamo che il concorrente sceglie, a parità di probabilità, il 2, quindi la dicotomia V/P passa per il conduttore a


1 0 .

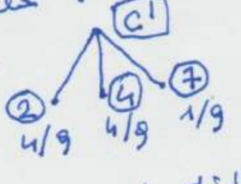
Ma perché il conduttore avrà agito così? Mira solo ad allungare il brodo, o tenta di confondere il concorrente facendolo ANCHE perdere?

(5)

A questo punto, invece di avviarsi verso la conclusione, svelando quale sia il numero vincente, il conduttore, che d'ora in avanti indicheremo con C, fa partecipare al gioco un secondo concorrente, che diremo C'' (e per contro C' il primo di cui abbiamo parlato fino ad adesso), il quale è stato rigorosamente tenuto all'oscuro di quanto verificatosi in precedenza.

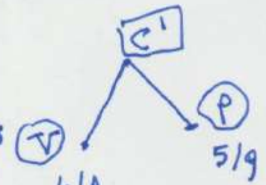
C chiede a C'' di indicare quale sia, secondo lui, fra i 3 numeri rimanenti (cioè 2, 4, 7), il numero vincente, e supponiamo che C'' scelga pure lui il numero 2, che è proprio quello giusto. Ricapitoliamo la situazione, ricordando che C'' è all'oscuro delle scelte di C' e viceversa.

C' si trova di fronte alla 9-tomia che abbiamo visto dianzi, che riassumiamo con

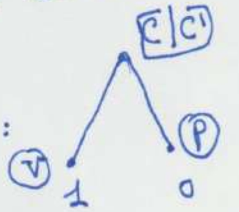



$QI(C', t_6) = 33{,}3\%$

e quindi con la dicotomia



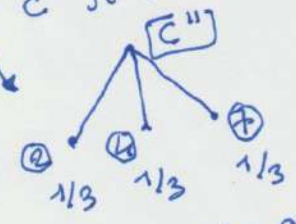

, secondo il punto di vista di C sarà:



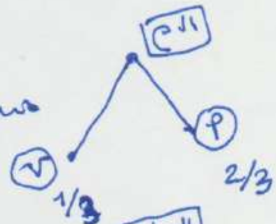

(poiché C' ha scelto il 2)

$t_6$

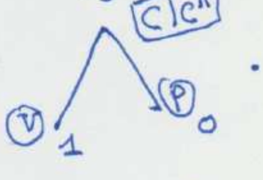
C'' si trova invece di fronte ad una tricotomia:




$QI(C'', t_6) = 0$ e ad una dicotomia



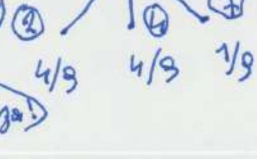

che, avendo C'' scelto il 2, corrisponde per C a:



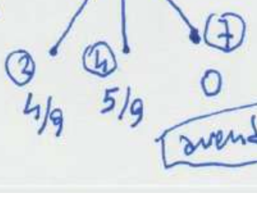

A questo punto C sopprime il 7, lasciando tutti (tranne se stesso!) nel dubbio se il numero vincente sia il 2 o il 4. C' passa da:

$t_7$

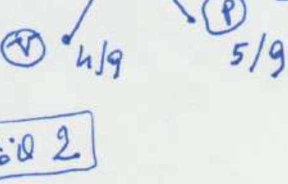
(Ci sono qui due 7, vera coincidenza!)




a:



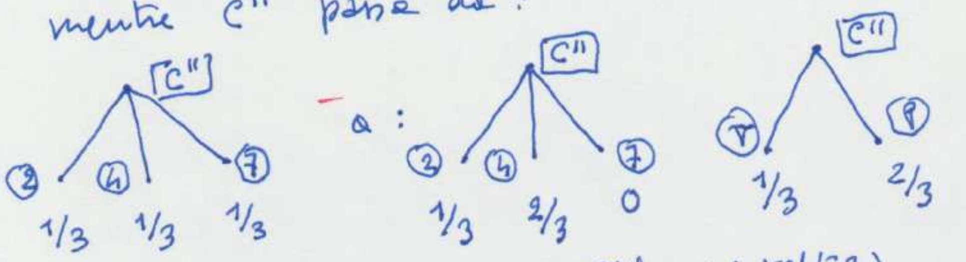

avendo scelto il 2




invariata rispetto a prima!

6

mentre C'' passa da:




pure questa dicotomia non è cambiata.

(ricordiamo che C'' ha più scelte)

Nota: se ci chiediamo quale sia $QI(C', t_7)$, avremo:

$$\frac{9}{8}\left[4\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{9}\right)^2+7\left(0-\frac{1}{9}\right)^2\right]=\frac{9}{8}\cdot\frac{32}{9^2}=\frac{4}{9}=44,4\%$$

(sempre di una 9-tomia si tratta, anche se con degli 0, quindi la relativa QI è diversa* da quella della tricotomia che si ottiene da essa semplificando il grafo!)

mentre per $QI(C'', t_7)$ avremo:

$$\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\right]=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{3}=33,3\%$$

* ovvero, il passato non si può cancellare, ed anzi a volte "orribile risorge", come ben sa la Manon di Puccini.

Nuovo intervento di C, che partecipa più che attivamente al gioco, che in realtà si può considerare costituito da diversi giochi che si intrecciano. (CAMBIANDO O INTRODUCENDO NUOVE REGOLE!) C chiede a C'' se vuole cambiare la sua scelta, di passare cioè da 2 a 4, visto che $pr(2, C'', t_7) = 1/3$ mentre $pr(4, C'', t_7) = 2/3$. C'' vede raddoppiare la sua probabilità di vittoria, accetta e perderà.

Ma C non si ferma qui, prima di rivelare finalmente il numero vincente ($t_8$), cioè il 2, chiede anche a C' se vuole cambiare la sua scelta, di prendere cioè il 4 scelto da C'', visto che $pr(4, C'', t_7) = 2/3 > pr(2, C', t_7) = \frac{4}{9}$ (ma anche $pr(2, C', t_7) = 4/9 < pr(4, C', t_7) = \frac{5}{9}$). C' accetta, ed anche lui perde, quando C scopre il 4, e rivela il 2! ($t_8$)

Del resto $pr(7, C', t_6) = \frac{1}{9}$ (che C' ha scelto il 7 all'inizio), e tale prob. è rimasta invariata, mentre $pr(7, C'', t_6)$ non può essere che 1/3 (C'' non conosce la scelta iniziale di C').

⑦

P.S. Dobbiamo essere perfettamente soddisfatti dell'analisi e delle conclusioni precedenti? Vediamo un po'. Poco da dire intorno alla scelta di C'', mentre c'è da riflettere sulla situazione di C' al tempo $t_7$, quando C ha rivelato che il 7 non è il numero vincente. Abbiamo detto infatti che C', il quale ha scelto il 2 a $t_6$, passa da

② ④ ⑦ — $4/9$ $4/9$ $1/9$ a ② ④ ⑦ — $4/9$ $5/9$ $0$ ($t_7$)

($t_6$) Ⓥ Ⓟ — $1/9$ $8/9$ a Ⓥ Ⓟ — $4/9$ $5/9$,

ma potrebbe invece ragionare così. Al tempo $t_7$, C ha scoperto il 7, quindi può darsi che C l'abbia omesso finora proprio perché era il mio numero, su cui c'eravamo puntati all'inizio, ovvero l'ha lasciato apposta e non per caso. Quindi la probabilità di 7 fin dall'inizio era 0, e di tutti gli altri numeri $1/8$. Non lo sapeva a $t_0$, ma lo sa adesso a $t_7$, quindi può riassumere tutte le sue successive

PRIMA NON LO SAPEVO CHE IL 7 NON AVREBBE VINTO, ADESSO LO SO, E HO ANCHE POTUTO RIMEDIARE

$\tilde{T}_0$ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ — $1/8$ $1/8$ $1/8$ $1/8$ $1/8$ $1/8$ [illegible] $1/8$ $1/8$ e così via, fino a:

9-tonie: PIÙ AUTENTICHE DELLE PRECEDENTI!

$\tilde{T}_1$ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ — $1/7$ $1/7$ $1/7$ $1/7$ $0$ $1/7$ $0$ $1/7$ $1/7$

...

$\tilde{T}_6$ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ — $0$ $1/2$ $0$ $1/2$ $0$ $0$ $0$ $0$ $0$

QUI GLI È STATO CONCESSO DI CAMBIARE → ($\widetilde{QI}(C', t_6) = \frac{7}{16} = 43{,}7\%$ $QI(C', t_6)$)

NUOVE QI

La scelta del 2 a $t_6$ corrisponde dunque a Ⓥ Ⓟ — $1/2$ $1/2$ e non a $4/9$ $5/9$.

In conclusione, di fronte all'ultima offerta proposta da C, di cambiare il suo numero 2 con il numero 4 scelto da C'', C' si trova sì davanti a $pr(4, C'', t_7) = 2/3 > pr(2, C', t_7) = 1/2$ ma pure a $pr(2, C', t_7) = 1/2 = pr(4, C', t_7)$, e la seconda disuguaglianza appare più significativa della prima (la quale prima si riferisce a 2 soggetti diversi!), e non cambia e vince.

INSOMMA, SE A $t_6$ CONCEDI A C' DI POTER CAMBIARE, LUI LO FA, E POI A $t_7$ GLI DICI CHE IL NUMERO DA LUI SCELTO PRELIMINARMENTE NON SAREBBE STATO VINCENTE, ECCO CHE C' PUÒ LEGITTIMAMENTE PENSARE: HA ALLORA ② ④ ⑦ A $t_6$ AVEVO $1/2$ $1/2$ $0$ E NON $4/9$ $4/9$ $1/9$, POSSO CIOÈ ABBANDONARE QUELL'$1/9$ CHE MI SONO PORTATO DIETRO PER MOLTO TEMPO

Sarebbe come giocare a testa o croce, un giocatore sceglie testa, e tu gli chiedi: vuoi cambiare in croce? Risposta: no, e perché mai dovrei?